Kinematika hmotného bodu

Polohový vektor (průvodič)
určuje polohu hmotného bodu v prostoru

$\vec{r}=(x,y,z)$ pomocí souřadnic

$\vec{r}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$ po složkách

$\vec{r}=\vec{r}_0 r \Rightarrow \vec{r}_0=\frac{\vec{r}}{r}$ jednotkový průvodič

$|\vec{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ velikost průvodiče

Dráha pohybu

x = x(t) parametrické rovnice dráhy
y = y(t)
z = z(t) $d\vec{r}=d\vec{s} \Rightarrow s=s(t)$

Diferenciály a derivace fyzikálních veličin

$v=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{(\Delta s)}{(\Delta t)}\right)=\frac{ds}{dt}$ okamžitá rychlost podíl veličin na nekonečně malé části veličiny

Rychlost a zrychlení

$\vec{v}=\frac{(d\vec{r})}{dt}=\dot{\vec{r}}$ $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)=\left(\frac{(dx)}{dt},\frac{(dy)}{dt},\frac{(dz)}{dt}\right)=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$

$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$ velikost vektoru zrychlení

$\vec{a}=\frac{(d\vec{v})}{dt}=\frac{(d^2\vec{r})}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}$ zrychlení

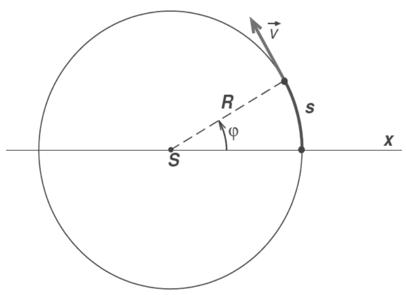
Tečné a normálové zrychlení

$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$ ke středu kružnice pohybu $a_n=\frac{V^2}{R}$ tečna k dráze

$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2}{R}\vec{n}$ rozklad vektoru zrychlení

$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$ velikost vektoru zrychlení

Kruhový pohyb



$\varphi=\frac{s}{R}\Rightarrow s=\varphi R\downarrow$

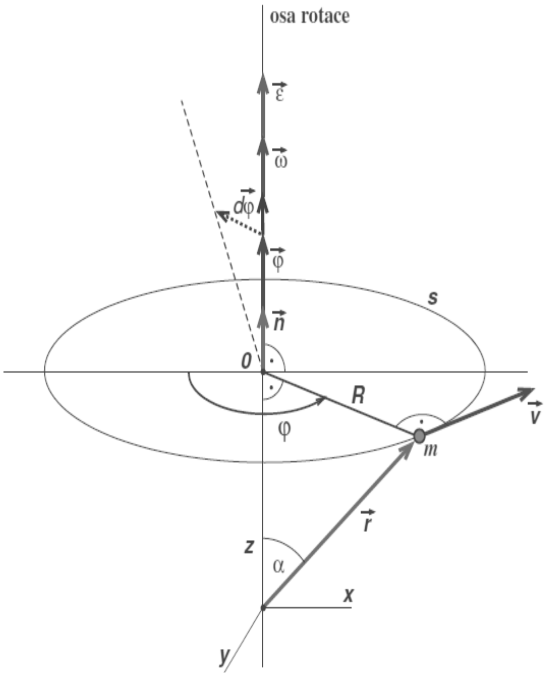
$\frac{ds}{dt}=R\frac{(d\varphi)}{dt}\downarrow\Rightarrow v=R\omega$

$\frac{dv}{dt}=R\frac{(d\omega)}{dt}\Rightarrow\epsilon=R\frac{(d\omega)}{dt}$

$a_\tau=\frac{dv}{dt}=R\epsilon$ $a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(R^2\omega^2)}{R}=R\omega^2$

kruhový (rotační) pohyb je úhlovými veličinami (φ,ω,ε) dostatečně popsán – tj. umíme z nich jednoznačně určit všechny dráhové veličiny (s,v,a).

Úhlové veličiny jako vektory



$\vec{\varphi} = \varphi\,\vec{n}$ vektor opsaného úhlu

$\vec{\omega} = \frac{(d\,\vec{\varphi})}{dt}$ vektor úhlové rychlosti

$\vec{\epsilon} = \frac{(d\,\vec{\omega})}{dt}$ vektor úhlového zrychlení

$\vec{\epsilon}\,\|\vec{\omega}\|\vec{\varphi}$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ obvodová rychlost

$\vec{a}_\tau = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$ tečné zrychlení

$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$ normálové zrychlení

Dynamika hmotného bodu

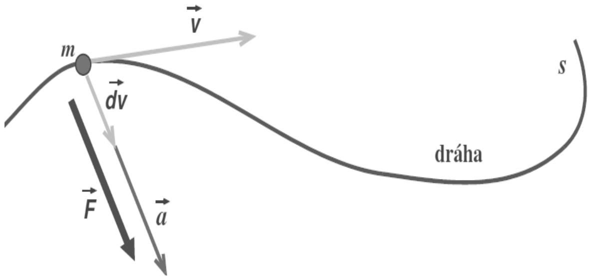
Newtonovy zákony

1) **zákon setrvačnosti**

Těleso setrvává v klidu nebo v pohybu rovnoměrním přímočarém, pokud není nuceno působením okolních těles svůj stav změnit.
Klid nebo pohyb závisí na volbě soustavy souřadnic. Je relativní.
-inerciální soustavy
Existence absolutního prostoru
-předpoklad všech nechanických dějů $\vec{v}=konstantní$
-rovnoměrně plyne ve všech soustavách

2) **zákon síly (pohybová rce)**

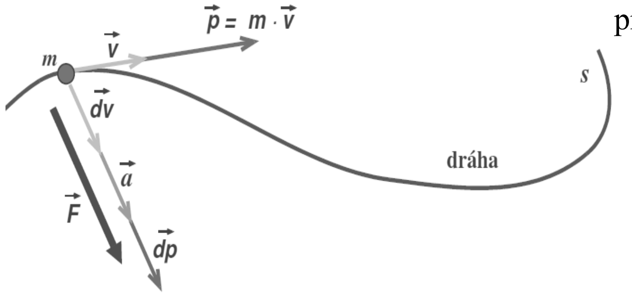
$\vec{F}=m\vec{a}$ vektorová fce
Okamžité zrychlení je příо úměrné působící síle (a nepřímo úměrné setrvačné hm. Tělesa)



$$F_x=m a_x=m\ddot{x}$$
$$F_y=m a_y=m\ddot{y} \quad \text{pohybové rce}$$
$$F_z=m a_z=m\ddot{z}$$

$$x=x(t)$$
$$y=y(t) \quad \text{param.rce}$$
$$z=z(t)$$

hybnost
$\vec{p}=m\vec{v}$ hm. bodu



pro časovou změnu platí:
$$\frac{(d\,\vec{p})}{dt}=m\frac{(d\,\vec{v})}{dt}=m\vec{a}$$

$$\vec{F}=\frac{(d\,\vec{p})}{dt}$$ **zákon síly**

3) **zákon akce a reakce**

Jestliže jedno těleso působí na druhé silou $\vec{F}$, pak druhé těleso působí na první silou stejně velkou, ale opačnou $-\vec{F}$
$\vec{G}=m\vec{g}$ tíha tělesa (grav. síla)
přitažlivá síla musí splňovat gravitační zákon:
$$G=Fg=\kappa\frac{Mm}{r^2}=m\kappa\frac{M}{r^2}$$
$$g=\kappa\frac{M}{r^2}=\kappa\frac{M}{r_Z^2}\approx 9{,}81\,ms^{-2}$$

Základní úkol dynamiky
Sestavení a vyřešení pohybových rovnic.

Dostředivá a odstředivá síla
$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$$
$$\vec{F}=m(\vec{a}_\tau+\vec{a}_n)=m\vec{a}_\tau+m\vec{a}_n=\vec{F}_\tau+\vec{F}_n$$

$\vec{F}_\tau = m\,\vec{a}_\tau = m\frac{dv}{dt}\vec{\tau}$ tečná síla

$\vec{F}_n = \vec{F}_d = m\,\vec{a}_n = m\frac{v^2}{R}\vec{u}$ dostředivá síla

odstředivá síla – reakce k dostředivé

Moment síly a moment hybnosti

Otáčivý účinek síly je úměrný její velikosti a kolmé vzdálenosti od osy rotace →

$M = F\,d = F\,r\sin\alpha = R\,F\,\tau$ moment síly

$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$ moment síly vektorově

zhodnocení „míry odstředivého pohybu“, analogicky:

$\vec{b} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\,\vec{v}$ moment hybnosti

Pohybová rovnice rotace

derivace $\vec{b} = \vec{r}\times m\,\vec{v}$

$\frac{(d\,\vec{b})}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\,\vec{v}) = \frac{(d\,\vec{r})}{dt}\times m\,\vec{v} + \vec{r}\,\frac{(d\,(m\,\vec{v}))}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}$

$\frac{(d\,\vec{b})}{dt} = \vec{M}$ pohybová rovnice rotačního pohybu

Časová změna momentu hybnosti hmotného bodu je rovna momentu působící síly.

Impulz síly a změna hybnosti

$I = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt = F\,\Delta t$ impuls síly

$\uparrow \vec{I} = \Delta\,\vec{p} \rightarrow \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\,\vec{v}_2 - m\,\vec{v}_1$ změna hybnosti

$\vec{I} = F\,\Delta\,t = \Delta\,\vec{p} = m\,\Delta\,\vec{v}$

Inerciální a neinerciální soustavy

Obecné vztahy mezi dvěma soustavami

S' se pohybuje vůči S rychlostí $\vec{u}$ (unášivá rychlost)

$$\vec{r}=\vec{r}\,'+\vec{R} \qquad \frac{(d\,\vec{r})}{dt}=\vec{v} \qquad \frac{(d\,\vec{r}\,')}{dt}=\frac{(d\,'\vec{r}\,')}{dt}=\vec{v}\,'$$

$\frac{(d\,\vec{R})}{dt}=\vec{u}$ unášivá rychlost soustavy S' $\quad \vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{u}$

$$\frac{(d\,\vec{v})}{dt}=\vec{a} \qquad \frac{(d\,\vec{v}\,')}{dt}=\vec{a}\,' \qquad \frac{(d\,\vec{u})}{dt}=\vec{a}_u \qquad \vec{a}=\vec{a}\,'+\vec{a}_u$$

Platnost Newtonových zákonů

$\vec{u}=konst.$

rovnoměrný přímočarý pohyb $\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{u}$ → 1. NZ platí i v S' → soustava S' je inerciální (inercie = setrvačnost)

$m\,\vec{a}\,'=m\,\vec{a}=\vec{F}=\vec{F}\,'$ → 2. NZ platí také v S', poh. Rce je stejná ve všech inerc. Soustavách

Invariance pohybové rovnice

pohybové rovnice jsou invariantní vůči Galileově transformaci

Galileova transformace

rovnoměrný přímočarý pohyb

$$\begin{aligned} x' &= x-u_x t \\ y' &= y-u_y t \\ z' &= z-u_z t \\ t &= t' \end{aligned} \qquad \text{inverzní:} \qquad \begin{aligned} x &= x'+u_x t \\ y &= y'+u_y t \\ z &= z'+u_z t \\ t &= t' \end{aligned}$$

Setrvačné síly při translaci (posuvný pohyb) a rotaci

nerovnoměrný křivočarý pohyb $\vec{u}\neq konst.$ $\quad \frac{(d\,\vec{u})}{dt}=\vec{a}_u\neq 0$

Zákon setrvačnosti tedy v S' neplatí → S' je neinerciální soustava

$\vec{F}=-m\,\vec{a}_u \qquad m\,\vec{a}\,'=\vec{F}\,'+\vec{F}+\vec{F}$

setrvačná síla pohybová rce v neinerciální soustavě

Pohyb. rce již není invariantní.

Konst. velikost, proměnlivý směr

u = konst $\quad \vec{F}_n=-m\,\vec{a}_n=-m\,\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$ odstředivá síla

nerovnoměrný křivočarý

$\vec{u}\neq konst. \quad \vec{F}_\tau=-m\,\vec{a}_\tau=-m\frac{du}{dt}\vec{\tau}$ Eulerova setrvačná síla

nerovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

$\vec{u}\neq konst. \quad \vec{\tau}=konst$

$\vec{F}=-m\,\vec{a}_u=-m\frac{du}{dt}\vec{\tau}$ jedná se o Eulerovu setrvačnou sílu

Rotace

$\vec{r}=\vec{r}\,'$ soustavy jsou totožné

$\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{\omega}+\vec{A}$ skládání rychlostí v soustavě S

$$\frac{(d\,\vec{A})}{dt}=\frac{(d\,'\vec{A})}{dt}+\vec{\omega}+\vec{A}$$

$m\vec{a} = m\vec{a} - m\vec{\epsilon}\times\vec{r} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\mathrm{m}\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,' = \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_2 = \vec{F}\,'$

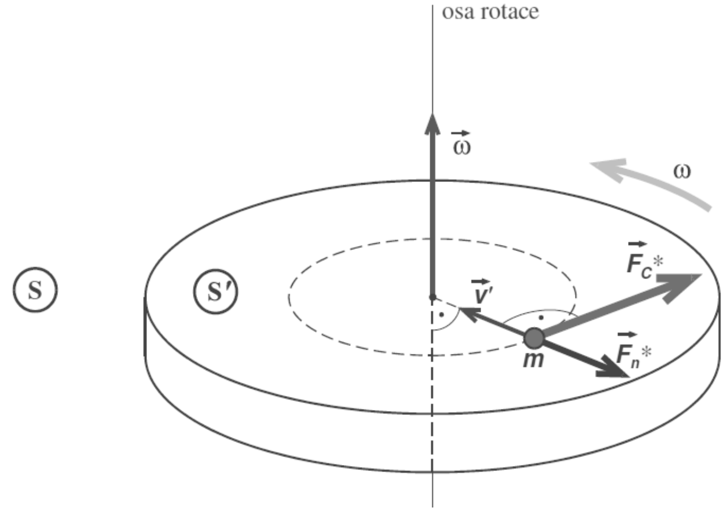
$\vec{F}_1 = \vec{F}_\tau = -m\vec{\epsilon}\times\vec{r}$ Eulerova (setrvačná) síla

$\vec{F}_2 = \vec{F}_n = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ odstředivá síla

$\vec{F}_3 = \vec{F}_C = -2\mathrm{m}\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$ Coriolisová síla

tato síla se objevuje pouze v případě vlastního pohybu hmotného bodu v neinerciální soustavě rychlostí, která není rovnoběžná s osou rotace.

Z důvodu relativně malé velikosti Coriolisovu sílu na povrchu Země v běžném životě přímo nepociuťjeme, přesto je to veličina dobře měřitelná a za určitých okolností může mít v nějaké technické aplikaci výrazný vliv.



Práce a energie

Definice mechanické práce

$A=\vec{F}\vec{s}$ mechanická práce [J]

$A=\int_S \vec{F}\,d\vec{s}=\int_S \vec{F}\,d\vec{r}$ mechanická práce na obecné dráze

$dA=\vec{F}\,d\vec{r}$ elementární práce vykonaná na diferenciálním úseku dráhy

Práce v gravitačním poli

$\vec{F}=-\kappa\frac{Mm}{r^2}\vec{r}_0$ newtonův gravitační zákon

$\kappa=6{,}67\cdot 10^{-11}[SI]$ gravitační konstanta

$\vec{r}_0=\frac{\vec{r}}{r}$ jednotkový vektor průvodiče

$\vec{K}=\frac{\vec{F}}{m}=-\kappa\frac{M}{r^2}\vec{r}_0$ intenzita gravitačního pole

$\uparrow\vec{g}\,(pro\,r=r_Z)$

Pojem konzervativnosti silového pole

Silové pole s takovou významnou vlastností, která umožňuje zachování, zakonzervování vykonané práce.

$A=\int_{\vec{r}_1(S)}^{\vec{r}_2}\vec{F}\,d\vec{r}$ Práce vnější síly v silovém poli

A' = -A práce potřebá pro přemístění tělesa

$\oint\vec{F}\,d\vec{r}=0$ nezávislost práce na dráze

Potencionální energie a potencionál

gravitační potencionální energie

$$A=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2-\vec{F}}d\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}(-(-\kappa\frac{Mm}{r^2}\vec{r}_0))\,d\vec{r}=\kappa Mm\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}(\frac{(\vec{r}_0 d\vec{r})}{r^2})=\frac{-(\kappa Mm)}{r}+\frac{(\kappa Mm)}{r_1}=W_p(\vec{r},\vec{r}_1)$$

$W_p(\vec{r})=\frac{-(\kappa Mm)}{r}$ speciální tvar $r_1\rightarrow\infty$

$\varphi(\vec{r})=\frac{W_p}{m}$ gravitační potenciál - potenciální energie tělesa jednotkové hmotnosti - tedy práce gravitačního pole potřebná k přenesení tělesa jednotkové hmotnosti z daného místa do nekonečna.

Kinetická energie

$A'=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}F\,d\vec{r}=\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2}mv\,dv=m\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2}v\,dv$

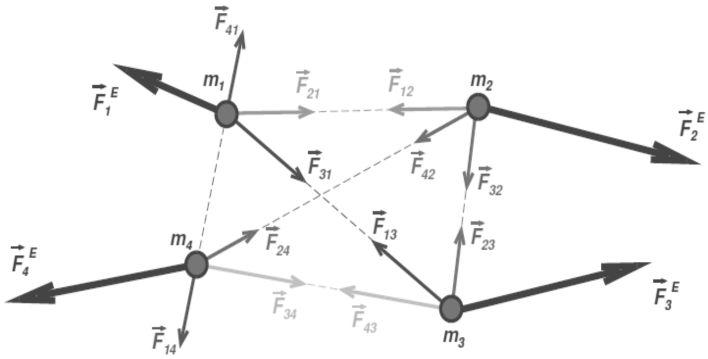
$W_k(v)=\frac{1}{2}mv^2$ schopnost tělesa vykonat práci

Zákon zachování energie

$W=W_p+W_k=konst.$

Součet potenciální a kinetické energie má v jakémkoliv místě konzervativního silového pole stále stejnou hodnotu.

Dynamika soustavy hmotných bodů



Vnitřní a vnější síly

vnější síly působí od objektů mimo soustavu $\vec{F}_2^E$

vnitřní síly působí od ostatních hm. bodů soustavy $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{32}...$

$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{jk} = 0$ součet vnitř. sil = 0

Celková hybnost soustavy

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_N = \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{(d\,\vec{r}_k)}{dt}$$

Výsledná vnější síla

$$\vec{F}^E = \vec{F}_1^E + \vec{F}_2^E + ... + \vec{F}_N^E = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^E$$

1. impulzová věta

Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů (za jednotku času) je rovna výsledné vnější síle.

$$\frac{(d\,\vec{P})}{dt} = \vec{F}^E$$

Vlastnosti těžiště

$m_0 = \sum_{k=1}^{N} m_k$ hmotnost $\vec{r}_0$ poloha $\vec{v}_0 = \frac{(d\,\vec{r}_0)}{dt}$ rychlost

Těžiště je nejjednodušší působiště gravitační tíhy tělesa.

$\vec{p}_0 = m\vec{v}_0 = m\frac{(d\,\vec{r}_0)}{dt}$ hybnost $p_0 = \vec{P}$ hybnost těžiště je rovna celkové hybnosti

Těžiště je rovnovážným bodem tělesa.

$\vec{r}_0 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k$ poloha hmotného bodu (těžiště) soustavy

$\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k\,' \times \vec{G}_k = 0$ rovnováha tíhových sil vzhledem k těžišti

Pohybová rovnice těžiště

$m\frac{(d^2\vec{r}_0)}{dt^2} = \vec{F}^E$ Těžiště se pohybuje jako hmotný bod o hmotnosti celé soustavy, na který působí výsledná vnější síla.

Translace

První věta impulsová, jako rovnice těžiště, uruje translaci soustavy hm. bodů.
<u>První věta impulsová je pohybovou rovnicí translace.</u>

Obecný pohyb

Obecný pohyb je složený z translace a rotace kolem osy jdoucí těžištěm.

Rotace

$$\frac{(d\,\vec{b})}{dt}=\vec{M}$$ pohybová rce pro rotaci

$$\vec{b}_k=\vec{r}_k\times\vec{p}_k=\vec{r}_k\times m_k\,\vec{v}_k=r_k\times m_k\frac{(d\,\vec{r}_k)}{dt}$$ moment hybnosti k-tého bodu soustavy

$$\vec{M}_k=\vec{r}_k\times\vec{F}_k$$ moment síly působící na k-tý bod soustavy

Celkový moment hybosti

$$B=\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k=\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times m_k\frac{(d\,r_k)}{dt}$$

Výsledný moment síly

$$\vec{M}^E=\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times\vec{F}_k^E$$

2. impulsová věta

$$\frac{(d\,\vec{B})}{dt}=\vec{M}^E$$ pohybová věta rotace

Časová změna celkového momentu hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výslednému momentu vnějších sil.
Obě impulsové věty jsou invariantní vzhledem ke Galileově transformaci.

Aplikace impulsových vět

Obecný pohyb soustavy hmotných bodů
translace – 1. impulsová věta
rotace – 2. impulsová věta
Transformace 2. impulsové věty do těžišťové souřadné soustavy

$$\frac{(d\vec{B})}{dt}=\vec{M}^E \qquad \text{po dosazení:} \qquad \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times m_k\frac{(d\vec{r}_k)}{dt}=\sum_{k=1}^{N} r_k\times\vec{F}_k^E$$

2. impulsová věta v těžišťové soustavě

$$\begin{aligned}\vec{r}&=\vec{R}+\vec{r}\,'\\ \vec{r}_k&=\vec{r}_0+\vec{r}_k\,'\end{aligned} \qquad \text{dosadíme} \uparrow \qquad \sum_{k=1}^{N}(\vec{r}_0+\vec{r}_k\,')\times\vec{F}_k^E$$

$$\frac{(d\vec{B}\,')}{dt}=\vec{M}\,'^E \qquad \text{v těžišťové soustavě}$$

Vztah rotace a translace
Vlastní pohyb těžiště nemá vliv na rotaci soustavy hm. bodů kolem osy jdoucí těžištěm.

Izolovaná soustava
-nepůsobí žádná vnější síla

$\vec{P}=konst.$ zákon zachování hybnosti
$\vec{B}=konst.$ zákon zachování momentu hybnosti
$\vec{P}_0=konst.$ zákon zachování setrvačnosti (těžiště)

Podmínky rovnováhy

$$\vec{F}^E=\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^E=0$$

$$\vec{M}^E=\sum_{k=1}^{N}\vec{M}_k^E=0$$

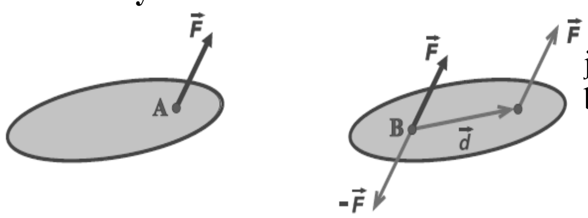
Rovnováha znammená nejen rovnováhu vnějších sil, ale i rovnováhu jejích momentů.

Ekvivalentní soustava sil – těžiště jako působiště tíhy
Vnější síly nahrazeny jiným souborem sil, který má na těleso stejný pohybový účinek.

$\sum_{k=1}^{N}\vec{r}\,'_k\times\vec{G}_k=0$ těžiště jako „bod rovnováhy“ gravitačních sil

$\vec{M}=\vec{d}\times\vec{F}$ moment dvojice sil

Posunutí síly



Musíme připojit dvojici sil se stejným momentem, jako měla původní síla vzhledem k tomuto novému bodu.

Dynamika tuhého tělesa

Tuhá soustava hmotných bodů
-neměnné vzdálenosti mezi body
-konstantní průvodiče mezi jednotlivými body
Těžiště

$\vec{r}_0=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k=konst$ těžiště má také konstantní polohu

Obecný pohyb
-rozklad na translační a rotační
-podmínky klidové rovnováhy platí
-lze využít vztahy izolované soustavy
-ekvivalentní soustavy sil

Kinetická energie tělesa

$W_{kin}=\frac{1}{2}mv^2$ při translaci

$W_{kin}=\frac{1}{2}J\,\omega^2$ při rotaci

$W_{kin}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\,\omega^2$ celková

Moment setrvačnosti

$J=\sum_{k=1}^{N} m_k R_k^2$

Steinerova věta

$J'=J+ma^2$ dokazuje minimální hodnotu momentu setrvačnosti pro osu jdoucí těžištěm

Pohybové rovnice pro rotaci a translaci tělesa

$m\frac{(d^2\vec{r}_0)}{dt^2}=\vec{F}^E$ těžiště (1. pohybová rce tělesa)

$\frac{(d\vec{B})}{dt}=\vec{M}^E$ 2. věta impulsová

$J\vec{\epsilon}=\vec{M}_{\parallel}^E$ pohybová rce pro rotaci kolem pevné osy (2. pohybová rce tělesa)

Přechod k reálnému tělesu

$\rho=\frac{dm}{dV}$ hustota hmoty

$m=\int\int_V\int \rho\,dV$ celková hmotnost tělesa

$\vec{r}_0=\frac{1}{m}\int\int_V\int \vec{r}\rho\,dV$ těžiště

$J=\int\int_V\int R^2\rho\,dV$ moment setrvačnosti

Fyzické a matematické kyvadlo

$\ddot{\varphi}+\omega^2\sin\varphi=0$ pohybová rovnice fyzického kyvadla

$\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0$ pohybová rovnice fyzického kyvada pro malé výchylky

$T=\frac{(2\pi)}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{lmg}}$ doba kmitu fyzického kyvadla (malé výchylky)

$T_k=\frac{T}{\omega}=\pi\sqrt{\frac{J}{lmg}}$ doba kyvu fyzického kyvadla (malé výchylky)

$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ doba kmitu matematického kyvadla (malé výchylky)

$l_{red}=\frac{J}{lm}$ redukovaná délka fyz. kyvadla – taková délka, že mat. kyvadlo má stejnou dobu kmitu

$g=\frac{(4\pi^2 l_{red})}{T^2}$ gravitační tíhové zrychlení

Základní postuláty a Lorentzovy transformace

Einsteinovy postuláty

1) všechny fyzikální zákony mají ve všech inerciálních soustavách stejný tvar (musí být invariantní)
2) rychlost světla ve vakuu je ve všech inerciálních soustavách konstantní

Lorentzovy transformační vztahy

x' = x – ut
y' = y
z' = z
t' = t

zjednodušené Galileovy transformace

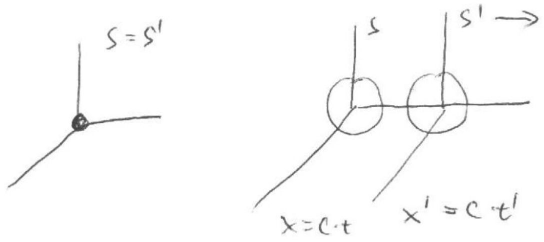
x' = k(x – ut)

podle Einst. 1. principu musí

mít obrácený vztah stejný tvar:
x = (x' – ut')
y, z zůstanou stejné
y' = y
z' = z

Změna časové souřadnice mezi soustavami

$$t' = kt + \frac{(1-k^2)}{ku} \cdot x$$



$$x' = \frac{(x-ut)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{(t - \frac{ux}{c^2})}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Lorentzovy transformace

Limita nízkých rychlostí

Pro nízké rychlosti přecházejí na klasické Galileovy transformace

$$pro\, u \ll c$$
$$x' = \frac{(x-ut)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \rightarrow x - ut$$
$$t' = \frac{(t - \frac{ux}{c^2})}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \rightarrow t$$

rychlosti v běžném životě

Fyzikální souřadná soustava

mechanická soustava měřících tyčí nezanedbatelné hmotnosti

Pozorovatel

aktivní činitel provádějící vlastní měření

Událost

změřené souřadnice x,y,z,t vypovídající o tom, že se něco stalo

Vlastní hodiny
musí být stále v klidu a stále na stejném místě soustavy
v každé soustavě musí proto být v místě očekávaných událostí vždy vlastní hodiny, stejně rychle jdoucí a synchronizované

Mezní rychlost těles
rychlost světla ve vakuu je mezí rychlostí pohybu hmotných těles

Časoprostorové „paradoxy“

Lorentzovy transformace, nové převodní vztahy mezi souřadnicemi inerciálních systémů, včetně času, přinášejí s sebou také nové „časoprostorové“ vztahy, které odporují dosavadní lidské zkušenosti s „makrosvětem“ kolem nás = paradoxy.

Události soumístné a nesoumístné

soumístné: (x,t_1) (x,t_2)

nesoumístné: (x_1,t_1) $(x_2.t_2)$

Události současné a nesoučasné

současné: (x_1,t) (x_2,t)

nesoučasné: (x_1,t_1) $(x_2.t_2)$

Kontrakce délek

$L=\Delta x=x_2-x_1$ délka v S – klidová

$L'=\Delta x'=x'_2-x'_1$ délka v S'

$L'=L\cdot\sqrt{1-u^2/c^2}<L$ kontrakce délky

Délka pohybujícího se tělesa je vždy menší, než jeho délka klidová – tj. změřená v klid. soustavě tělesa.
Kontrakce délek nastává jen ve směru pohybu těles.

Dilatace času

$\Delta t=t_2-t_1$ čas. interval v S

$\Delta t'=t'_2-t'_1$ čas. interval v S'

$\Delta t'=\frac{(\Delta t)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ dilatace času

Dobu trvání nějakého děje probíhajícího na pohybujícím se tělese naměříme vždy vyšší, než v klidové soustavě tělesa.
Hodiny v pohybující se soustavě jdou z hlediska klidové soustavy pomaleji.

Experimentální ověření

-záření pohybujících se atomů
-doba života pohybujících se mikročástic
-přímé měření času na pohybujících se tělesech

Relativnost současnosti

-současné nesoumístné události v S

(x_1,t_1) současnost: $t_1 = t_2$

(x_2,t_2) $\Delta t=t_2-t_1=0$

-jsou v S' také současné?

(x'_1,t'_1) $\Delta t'=t'_2-t'_1$

(x'_2,t'_2) $\Delta t'=\frac{(-u/c^2(x_2-x_1))}{\sqrt{1-u^2/c2}}\neq 0$

v S' již nejsou současné
pokud $t'_2 < t'_1$, první se stane druhá událost

Současnost nesoumístných událostí je relativní, tj. existuje pouze v jedné souřadné soustavě – v jiných soustavách pak současné nejsou.
Pouze současnost soumístných událostí je absolutní – jsou současné v každé souřadné soustavě.

Obrácení časového sledu ↑
Časový sled událostí není absolutní. Existuje souřadná soustava, ve které se stanou v opačném pořadí.

Ohrožení kauzality

$t_2 - t_1 > \frac{(x_2 - x_1)}{c}$ podmínka kauzality

Speciální teorie relativity není v rozporu s principem kauzality.

Energie v teorii relativity

Energie kinetická

$E_{kin} = mc^2 - m_0 c^2$ $E_{kin} = m(v)c^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} c^2 - m_0 c^2 \to \infty$ pro $v \to c$

m_0 – klidová hmotnost, m – hmotnost při okamžité rychlosti

klidová

$E_0 = m_0 c^2$

celková

$E = E_{kin} + E_0 = mc^2$

$E_{kin} = E - E_0$ kinetická en. Vyjádřené pomocí celkové a klidové

Einsteinův vztah

$E = mc^2$ chápán jako vyjádření ekvivalence hmoty a energie

Hmotností úbytek jader a vazební energie

${}^{A}_{Z}X$ *např* ${}^{12}_{6}C$

nukleonové číslo A – počet nukleonů
protonové číslo Z – počet protonů v jádře
A*Z – počet neutronů v jádře

$\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) m_n - m_j \neq 0$ hmotnostní úbytek jádra

$E = \Delta mc^2$ vazební energie jádra – práce sil při vzniku jádra (jaderné síly)

Anhilace

100% přeměna hmoty na ekvivalentní energii

Celková energie a hybnost

$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$ vztah celkové energie a hybnosti

Energie fotonu

$E = pc$ celková energie fotonu

Vnitřní energie a teplota podle kinetické teorie

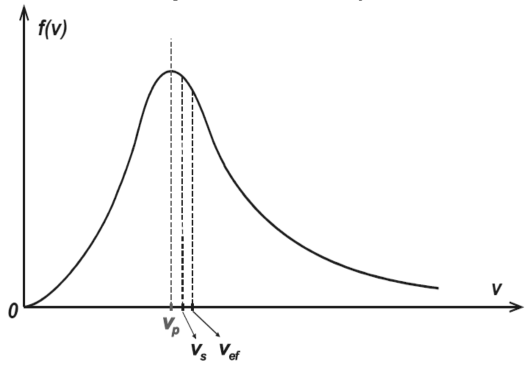
Plyn jako mechanická soustava hmotných částic
-nejjednodušší na ideální plyn (molekuly na sebe nepůsobí silami)
-nulová potencionální energie
-molekuly bereme jako hmotné body (nejlépe jednoatomové – zanedbáváme rotaci)

Neuspořádaný pohyb
směr a rychlost pohybu se neustále mění, rychlosti v intervalu $(0,+\infty)$

Maxwellovo rozdělení rychlostí

$$f(v)=\frac{dN}{dv}=4\pi N\left(\frac{m}{(2\pi kT)}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{-mv^2}{2kT}} v^2$$ rozdělovací funkce

m – hmotnost jedné molekuly, k – Boltzmanova konstanta, T – absolutní teplota



v_p *nejpravděpodobnější rychlost*

$$v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

v_{ef} *efektivní rychlost*

$$v_{ef}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Střední rychlost molekul ideálního plynu

$$\bar{v}=\frac{1}{N}\int_0^\infty v\,dN=\frac{1}{N}\int_0^\infty v\,f(v)\,dv=\sqrt{\frac{8kT}{(\pi m)}} \qquad v_s=\bar{v}=\frac{(v_1+v_2+...+v_N)}{N}$$

Energie jedné molekuly a celková energie soustavy

$\bar{\epsilon}=\frac{3}{2}kT$ střední energie jedné molekuly

$U=E_{kin}=\frac{3}{2}\nu RT$ vnitřní energie ideálního plynu

Význam teploty
Teplota je mírou kinetické energie neuspořádaného pohybu částic látky za stavu termodyynamické rovnováhy (u ideálního plynu je přímo úměrná celkové energii).

Vlastnosti vnitřní energie jako stavové veličiny
existuje úplný diferenciál dU

$\int_1^2 dU=konst.$ změna vnitřní energie závisí pouze na počátečním a koncovém bodu

$\oint dU=0$ při uzavřeném procesu se vnitřní energie nezmění

Teplo, práce a první věta termodynamiky

Přijaté teplo a práce plynu jako procesní veličiny

Teplo je vnitřní energie předávaná srážkami částic

- je spojené s procesem (nikoli se stavem) => procesní veličina

Práce - pokud se mění objem plynu, koná práci

- také procesí veličina

Jejich vyjádření a základní vlastnosti

$$Q = cm\,\Delta T$$
$$dQ = cm\,dT$$

Teplo:
$$Q = cm\int_{T_1}^{T_2} dT = cm(T_2 - T_1) \qquad [J]$$

c – měrná tepelná kapacita $[J\,kg^{-1}K^{-1}]$

$dQ = cm\,dT = C\,\nu\,M_{mol}\,dT = \nu\,C\,dT$

C – molární tepelná kapacita

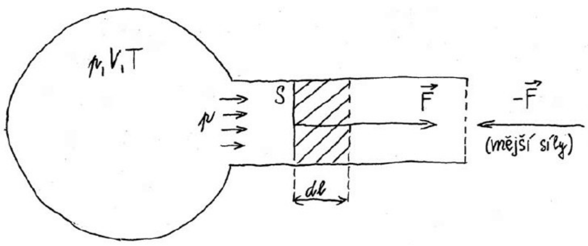
IZOCHORICKÝ OHŘEV $dQ = \nu C_v dT$

IZOBARICKÝ OHŘEV $dQ = \nu C_p dT$

$C_p = C_v + R \Rightarrow C_p > C_v$ Meyerův vztah

$\oint dQ = Q \neq 0$ teplo přijaté látkou při kruhovém termodynam. Ději je vždy různé od 0

Práce:

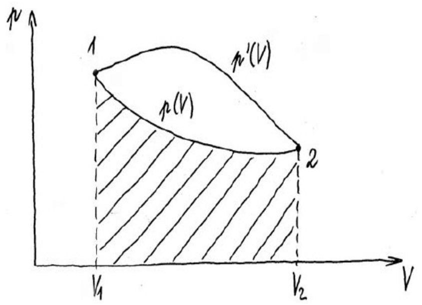


tlak plynu: $p = \frac{F}{S}$

$dA = F\,dl$

$dA = p\,S\,dl$

$da = p\,dV$ elementární práce plynu



$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 p\,dV = \int_1^2 p(V)\,dV$$ celková práce plynu

$\oint dA \neq 0$ (obsah pod křivkou)

Práce vykonaná při kruhovém ději je vždy různá od nuly

1. věta jako zákon zachování energie v termodynamickém systému

$$dU = dQ - dA$$
$$\Delta U = Q - A$$

Teplo dodávané plynu zvyšuje jeho vnitř. energii, práce ji o stejnou hodnout snižuje

Přeměna tepla na práci

$$A = Q - \Delta U$$
$$dA = dQ - dU$$

plyn může konat práci buď přeměnou z dodaného tepla, nebo na úkor své vnitřní energie

Perpetuum mobile 1. druhu

Práci je možné konat pouze přeměnou z jiných forem energie.

Tepelné stroje a vznik 2. věty termodynamiky

Přeměna tepla na práci v uzavřeném termodynamickém ději

A = Q práce vykonaná při kruhovém termodynam. procesu se přímo rovná dodanému teplu

Tepelné stroje

Periodicky pracující tepelný stroj využívá při své činnosti uzavřený (kruhový) termodynamický proces (cyklus).

-nikdy nedosáhne 100% účinnosti (2. věta)

Slovní formulace 2. věty

Není možno sestroji periodicky pracující stroj, který by nezpůsoboval nic jiného, než že by ochlazoval tepelnou lázeň a konal zároveň práci.

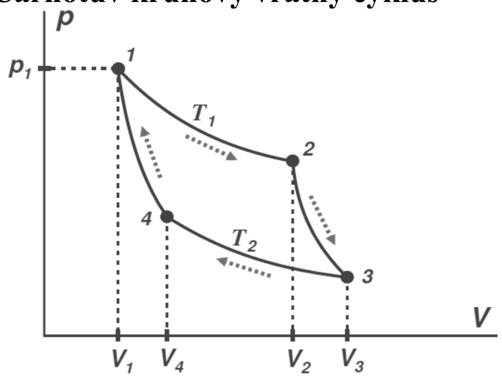
Není možné sestrojit Perpetuum mobile 2. druhu.

Teplo nemůže samovolně přecházet ze studenějšího tělesa na teplejší.

Perpetuum mobile 2. druhu

-tepelný stroj, který by dokonale přeměňoval tepelnou energii na práci, NEEXISTUJE

Carnotův kruhový vratný cyklus



1. izotermická expanze (1-2) $T_1 = konst.$

$$A_1 = Q_1 = \int_1^2 p\,dV = \nu R T_1 \int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{dV}{V}\right) = \nu R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} > 0$$

2. adiabatická expanze (2-3) -dokonalá tepelná izolace

$$A_2 = -\Delta U = \int_{T_1}^{T_2 - \nu C_v} dT = -\nu C_v (T_2 - T_1) > 0$$

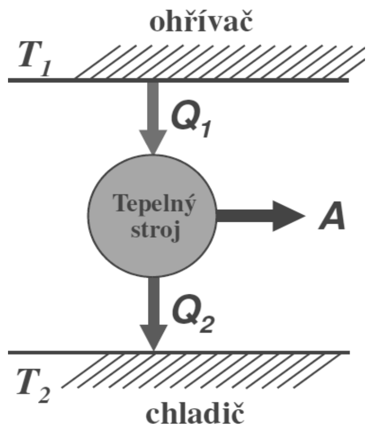
3. izotermická komprese (3-4) $T_2 = konst.$

$$A_3 = Q_2 = \int_3^4 p\,dV = \nu R T_2 \int_{v_3}^{v_4} \left(\frac{dV}{V}\right) = \nu R T_2 \ln\frac{V_4}{V_3} < 0$$

4. adiabatická komprese (4-1) -dokonalá tepelná izolace

$$A_4 = -\Delta U = \int_{T_2}^{T_1 - \nu C_v} dT = -\nu C_v (T_1 - T_2) < 0$$

Energetická bilance a účinnost



a) $U_1 = \nu C_v T_1$, $U_2 = \nu C_v T_2$ U => konst.

b) $A = \nu R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + \nu R T_2 \ln\frac{V_4}{V_3} = \nu R \ln\frac{V_2}{V_1}(T_1 - T_2)$

c) $Q = Q_1 + Q_2$ Q_1 – teplo přijaté

$A = Q = Q_1 + Q_2$ Q_2 – teplo odevzdané

$Q_1 = A - Q_2$

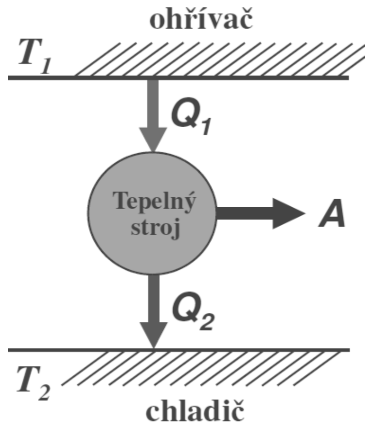
účinnost vratného cyklu $\eta = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} = \frac{A}{Q_1}$

Carnotova věta

$\eta = \frac{A}{Q_1} < \frac{(T_1 - T_2)}{T_1}$ pro nevratný cyklus

Druhá věta termodynamiky a její matematický tvar

Různé slovní formulace 2. věty
Není možno sestrojit periodicky pracující stroj, který by pouze ochlazoval tepelnou lázeň a konal rovnocennou práci.
Nelze sestroji Perpetuum mobile 2. druhu.
Teplo nemůže samovolně přecházet ze studenějšího tělesa na teplejší.



Účinnost tepelných strojů

$\eta=\frac{(T_1-T_2)}{T_1}=\frac{A}{Q_1}$ vratný Carnotův cyklus

$\eta=\frac{A}{Q_1}<\frac{(T_1-T_2)}{T_1}$ nevratný cyklus

Redukovaná tepla

$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}=0$ podíl vratně přijatého tepla a teploty, při které k tomu došlo

Clausiův integrál

$\frac{\oint dQ}{T}=0$ pro uzavřené vratné cykly

$\frac{\oint dQ}{T}<0$ pro nevratné cykly

$\frac{\oint dQ}{T}\leq 0$ matematické vyjádření 2. věty termodynamiky

Plynem dodané teplo se nemůže nikdy 100% přeměnit na práci, protože tento integrál dokazuje existenci Q_2.

Maximální účinnost Carnotova cyklu

$\eta=\frac{A}{Q_1}=\frac{(Q_1-Q_2)}{Q_1}\leq\frac{(T_1-T_2)}{T_1}$ je ze všech vratných cyklů nejúčinnější

Vyjádření 2. věty pomocí entropie

$dS\geq 0$ princip růstu entropie v izolované soustavě, matematický tvar 2.věty termodynamiky.
Roste a blíží se k rovnovážnému stavu.
V termodynamické rovnováze je entropie maximální.

Statistický smysl entropie

$S=k\ln w$ (+konst.) vztah entropie a pravděpodobnoti
w – termodynamická pravděpodobnost (počet mikrostavů daného stavu)
k – Boltzmanova konstanta

Směr nevratných procesů je odůvodněn vývojem termodynamické soustavy od méně pravděpodobných stavů ke stavům pravděpodobnějším.
Zpětný směr těchto procesů je principiálně nemožný, je však zanedbatelně málo pravděpodobný.

Entropie

Zavedení entropie jako stavové veličiny

$dS = \frac{dQ}{T}$ definice entropie (!není definována velikost, ale přírůstek)

$dQ = \nu C_v dT + p dV$

$dQ = \nu C_v dT + \frac{(\nu RT dV)}{V}$

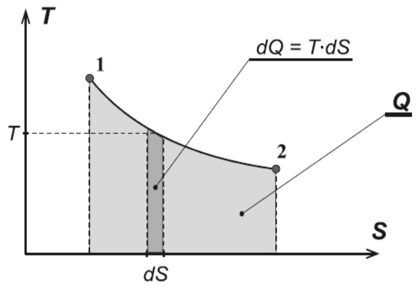
Její změna při vratných procesech

$\Delta S = \nu (C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1})$ změna je přímo úměrná množství plynu

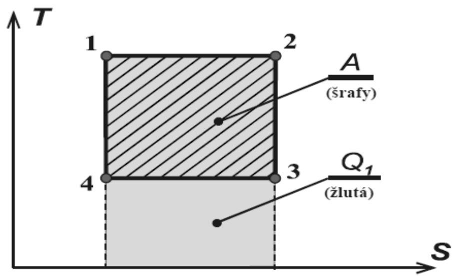
Výpočet dodaného tepla

$Q = \int_{\substack{1 \\ vr.}}^{2} dQ = \int_{\substack{1 \\ vr.}}^{2} T\, dS$

Tepelný diagram



specielně pro Carnotův cyklus



Spojená formulace 1. a 2. věty

$dU = T\, dS - p\, dV$ vyjadřuje přírůstek vnitřní energie

Změna entropie při nevratných procesech

$S_2 - S_1 = \Delta S > \int_{\substack{1 \\ nevr.}}^{2} (\frac{dQ}{T})$ „míra nevratnosti“ termodynamického děje

Princip růstu entropie v izolovaných soustavách

$dS \geq 0$ nejobecnější matematická formulace 2. věty termodynamiky

Termodynamická rovnováha

V termodynamické rovnováze je entropie izolované soustavy maximální.

Souvislost entropie s pravděpodobností stavu termodynamického systému

2. věta termodynamiky je statistickým zákonem – platí jen pro velké množství prvků

Makrostav a mikrostavy

makrostav – stav celé soustavy
mikrostav – stav částice (poloha a rychlost)

Termodynamická pravděpodobnost vztahu

w – počat mikrostavů daného stavu

Boltzmanův vztah

$S = k \ln w$ vztah entropie a pravděpodobnosti

Netlumený lineární harmonický oscilátor

Pružná síla

$\vec{F}=-k\vec{r}$ působicí síla

Pohybová rovnice

$$\omega^2=\frac{k}{m} \qquad \frac{(d^2y)}{dt^2}+\omega^2 y=0$$

Úhlová frekvence

$$\omega=2\frac{\pi}{T}=2\pi f$$

Reálné (obecné) řešení

$$y=y(t)=C\sin\omega t+D\cos\omega t$$
$$y=y(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0)$$
$$y=y(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

Fázová konstanta

$$\varphi_0$$

Perioda a frekvence

$$f=\frac{1}{T}$$

Komplexní amplituda

$$\widehat{A}=A e^{i\varphi_0}$$

Komplexní tvar

$$\hat{u}=\widehat{A}e^{i\omega t}$$

Komplexní řešení

$$y=C_1 e^{+i\omega t}+C_2 e^{-i\omega t}$$

Převod na reálné řešení

$$y=C_1 e^{+i\omega t}+C_2 e^{-i\omega t}=C_1(\cos\omega t+i\sin\omega t)+C_2(\cos\omega t-i\sin\omega t)$$
$$y=(C_1+C_2)\cos\omega t+i(C_1-C_2)\sin\omega t$$
$$C_1=-C_2=-i\frac{A}{2}(A\,lib.\,reál.\,číslo)$$
$$y=A\sin\omega t$$

Rychlost a zrychlení kmitů

$$v=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(A\sin\omega t) \qquad a=\frac{(d^2y)}{dt^2}=\frac{d}{dt}(A\omega\cos\omega t)$$

Energie
kinetická

$$W_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(A\omega\cos\omega t)^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2\omega t$$

potencionální

$$W_p(\vec{r})=W_y=\frac{1}{2}ky^2=\frac{1}{2}k(A\sin\omega t)^2=\frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2\omega t$$

celková

$$W=W_k+W_p=\frac{1}{2}m\omega^2 A^2=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_m^2$$

Reálný (tlumený) harmonický oscilátor

Viskozní tření

$\vec{F}_t = -B\vec{v} = -B\frac{(d\vec{r})}{dt}$ brzdící síla. Velikost třecí síly úměrná rychlosti.

Pohybová rovnice

$\ddot{y} + 2\mathrm{b}\,\dot{y} + \omega^2 y = 0$ tlum. kmitů

charakteristická rce

$\alpha^2 + 2\mathrm{b}\,\alpha + \omega^2 = 0$

Konstanta útlumu

$\frac{B}{m} = 2\mathrm{b}$ vyjadřuje intenzitu účinku brzdících sil

Vlastní úhlová frekvence

$\frac{k}{m} = \omega^2$

Tvar řešení pro malé tlumení (b< ω)

$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2}$ úhlová frekvence tlumených kmitů

$y = A e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0)$ tlumené kmity

Amplituda a perioda tlumených kmitů

$A_1 = A e^{-bt}$

$T_1 = \frac{(2\pi)}{\omega_1} = \frac{(2\pi)}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} \geq \frac{(2\pi)}{\omega} = T$ T_1 není úplně perioda, protože amplituda klesá → průběh fce se neopakuje

Útlum a logaritmický dekrement

$\lambda = \frac{(y(t))}{y}(t + T_1) = e^{+bT_1}$ útlum

$\delta = \ln\lambda = bT_1 = 2\pi\frac{b}{\omega_1}$ logaritmický dekrement

$b = \frac{\delta}{T_1} = \ln\frac{\lambda}{T_1}$ konstanta útlumu

Celková energie kmitů a ztráta energie

$W = \frac{1}{2} m\omega_1^2 A^2 e^{-2\mathrm{bt}}$ energie tlumeného oscilátoru

$W_1 = |\frac{(dW)}{dt}| T_1 = 2\mathrm{bWT}_1 = \frac{(2\mathrm{bW}\,2\pi)}{\omega_1} = \frac{(4\pi bW)}{\omega_1}$ ztráta energie za jednu periodu

Kvalita oscilátoru

$Q = 2\pi\frac{W_{stř}}{W_1}$

Velmi malé tlumení (b << ω)

$Q = \frac{\omega}{2\mathrm{b}}$ kvalita oscilátoru >>1 – kmity se tlumí velmi pomalu

Velké tlumení (b > ω)

$y = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$ vrací se zvolna zpět do rovnovážné polohy, aniž by překmitnul do opačné výchylky. Takový pohyb se nazývá aperiodický.

Kritické mezní tlumení (b = ω)

$y = C_1 e^{-bt} + C_2 t e^{-bt} = (C_1 + C_2 t) e^{-bt}$ pohyb je opět aperiodický, funkce však klesá k nule nejrychlejším možným způsobem

Nucené kmity

Periodické buzení

$F_b = F_0 \sin \Omega t$

Pohybová rovnice nucených kmitů

$$\ddot{y} + 2b\,\dot{y} + \omega^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

Obecné řešení nucených kmitů

$y = C\,e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + A \sin(\Omega t + \Phi_0)$ první část zastupuje tlumené kmity, druhá budící sílu

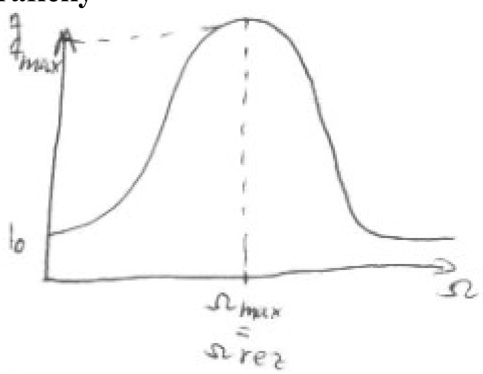
Ustálený stav

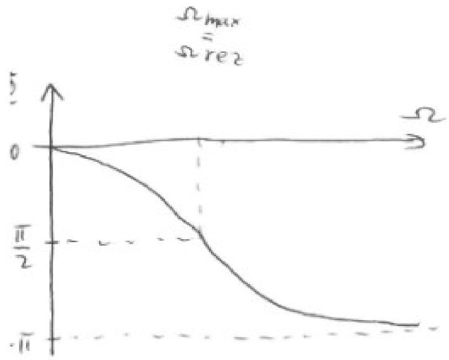
$y = A \sin(\omega t + \Phi_0)$ partik. řešení dif. rce

Výsledná amplituda a fázová konstanta kmitů

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}} \qquad tg\,\Phi_0 = \frac{-(2b\,\Omega)}{(\omega^2 - \Omega^2)}$$

Graficky





Počáteční amplituda jako amplituda vlastních kmitů

$A_0(\Omega = 0) = \frac{F_0}{k}$ jako by nebyly tlumené

Amplitudová rezonance

je vidět z obrázku (levého)

Rezonanční frekvence a rezonanční maximum

$\Omega_{max} = \Omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2b^2}$ $\qquad A_{max} = \frac{F_0}{(2mb\,\omega_1)}$ max amplitudové rezonance

$(\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2})$ lze dosadit ↑

Speciálně při velmi malém tlumení (b << ω)

$\omega_{rez} \approx \omega$ $\qquad \omega_1 \approx \omega$ $\qquad Q = \frac{\omega}{2b}$ kvalita oscilátoru >>1

$A_{max} = A_0 Q$ maximum amplitudové rezonance

Využití v elektrotechnice pro pásmové filtry.

Aplikace na elektronický rezonanční RLC obvod

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{(\Omega C)} - \Omega L\right)^2 + R^2}}$$ Ohmův zákon pro střídavý obvod

Skládání rovnoběžných kmitů

Kmity stejné frekvence

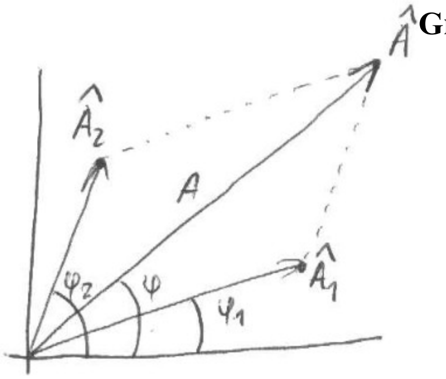
$\hat{u}=\hat{u_1}+\hat{u_2}=\widehat{A_2}e^{i\omega t}=(\widehat{A_1}+\widehat{A_2})e^{i\omega t}$

-komplexní tvar výsledných kmitů

$\hat{u}=(\widehat{A_1}+\widehat{A_2})e^{i\omega t}=\hat{A}e^{i\omega t}=\hat{A}e^{i\varphi}e^{i\omega t}$

$A e^{i\varphi}=A_1 e^{i\varphi_1}+A_2 e^{i\varphi_2}$ výsledná komplexní amplituda

Graficky:



Podmínka extrémů

$\varphi_2-\varphi_1=\pm 2\mathrm{n}\,\pi$ max

$\varphi_2-\varphi_1=\pm(2\mathrm{n}+1)\pi$ min

Kmity různé frekvence

$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_1}{n_2}$ podmínka periodičnosti

Blízké frekvence

kmity blízké frekvence ↓

$\omega_1\neq\omega_2\,,\,\omega_1\rightarrow\omega_2$

$y=2\mathrm{A}\cos\omega_0 t\sin\omega t$

$A'=2\mathrm{A}\cos\omega_0 t$ amplituda kmitů blízké frekvence

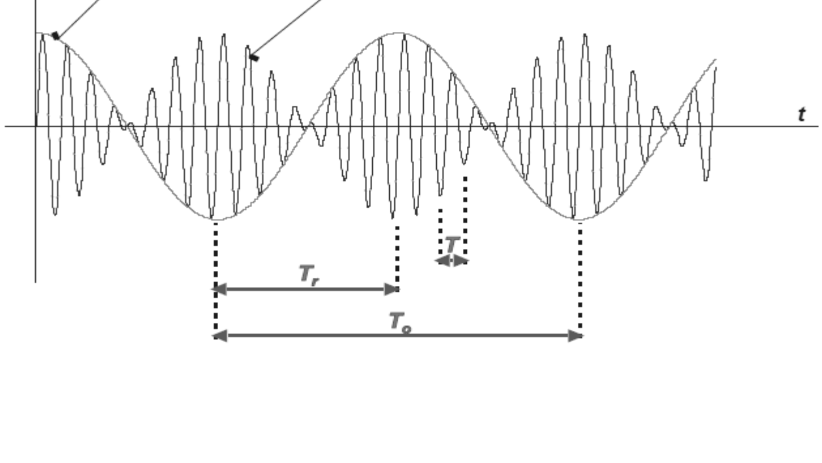
$y=A'\sin\omega t$ kmity blízké frekvence

$\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}=\omega\approx\omega_1\approx\omega_2$

$\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}=0\rightarrow 0$

skládání 2 kmitů blízké f nejsou matenaticky harmonické kmity, ale protože zjevne platí tyto ↑ 2 podmínky, lze je interpretovat jako přibližně harmonické.

Graficky:



Frekvence rázů

$f_r=f_1-f_2$

Vlnění pružného prostředí

Vznik vlnění
vychýlíme 1 bod soustavy z rovnovážné polohy, a tak se vlnění začne šířit do celé soustavy

Huygensův princip
Předpokládá, že v každém okamžiku lze každý bod na čele šířící se vlny chápat jako nový zdroj vlnění (sekundárních vln).

Lineárně polarizované postupné vlnění v bodové řadě

$u(x,t)=A\sin\omega(t-\frac{x}{c})$ c – rychlost šíření výchylky

$t'=\frac{x}{c}$ časové zpoždění kmitů – bod ve vzdálenosti x totiž nezačne kmitat v době spuštění

Různé tvary rovnice vlnění

$u(x,t)=A\sin(\omega t-\frac{(\omega x)}{c})$ po roznásobení

$u(x,t)=A\sin(\omega t+\frac{(\omega x)}{c})$ v záporném směru osy x

$u(x,t)=A\sin(\omega t-kx)$

$u(x,t)=A\sin(\omega t-kx+\varphi_0)$

$\hat{u}(x,t)=A\,e^{\pm i(\omega t\pm kx+\varphi_0)}$ komplexní tvar

Fázová rychlost
-rychlost, kterou se přemisťuje fáze vlnění

$c=\lambda v=\frac{\omega}{k}$ λ – vlnová délka, v – frekvence, k – vlnový vektor

Vlnová délka

$\lambda=\frac{(2\pi c)}{\omega}=\frac{(2\pi c)}{(2\pi f)}=\frac{c}{f}=cT$ perioda – vzdálenost mezi místy stejné fáze vlnění

Úhlový vlnočet

$k=\frac{\omega}{c}=\frac{(2\pi f)}{c}=\frac{(2\pi)}{\lambda}=2\pi\sigma$ úhl. vlnočet – podíl úhlové frekvence a fázové rychlosti

Neharmonické vlnění

$u_0=f(t)$ $u(x,t)=f(t\pm\frac{x}{c})$ vyjadřuje časové předbíhání (zpožďování) v místě x oproti 0

Vlnění v prostoru
Vlnění se šíří do všech směrů po vlnoplochách, které mají všude stejnou výchylku, zpoždění, fázi.

Vlnoplocha je geometrické místo kmitů stejné fáze
Paprsek je přímka ležící ve směru vlnění v daném místě. Je kolmý k vlnoplochám. Je vlastně jednoduchá bodová řada.

Kulová vlna
nejčastější tvar vlnoploch. Vzniká, když se vlnění šíří všemi směry stejnou fázovou rychlostí

Rovinná vlna
ve velké vzdálenosti od zdroje lze v malé objemové části prostředí. Čím menší část, tím přesnější.

Vlnová rovnice

$$\frac{(d^2 u)}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{(d^2 u)}{dt^2}$$ nejjednodušší tvar

$$\Delta \vec{u} = \frac{1}{c^2} \frac{(d^2 \vec{u})}{dt^2}$$ obecný tvar

platí pro všechny druhy vlnění

Skládání (interference) vlnění
Jde o skládání několika různých kmitů od různých zdrojů v určitém místě.

$$|x_1 - x_2| = n\lambda = 2\mathrm{n}\frac{\lambda}{2}$$ podmínka maxima interference

$$|x_1 - x_2| = (2\mathrm{n}+1)\frac{\lambda}{2}$$ podmínka minima interference