Netlumený lineární harmonický oscilátor

Pružná síla

$\vec{F}=-k\vec{r}$ působící síla

Pohybová rovnice

$\omega^2=\frac{k}{m}$ $\frac{(d^2 y)}{dt^2}+\omega^2 y=0$

Úhlová frekvence

$\omega=2\frac{\pi}{T}=2\pi f$

Reálné (obecné) řešení

$y=y(t)=C\sin\omega t+D\cos\omega t$

$y=y(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0)$

$y=y(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

Fázová konstanta

φ_0

Perioda a frekvence

$f=\frac{1}{T}$

Komplexní amplituda

$\hat{A}=A e^{i\varphi_0}$

Komplexní tvar

$\hat{u}=\hat{A}e^{i\omega t}$

Komplexní řešení

$y=C_1 e^{+i\omega t}+C_2 e^{-i\omega t}$

Převod na reálné řešení

$$y=C_1 e^{+i\omega t}+C_2 e^{-i\omega t}=C_1(\cos\omega t+i\sin\omega t)+C_2(\cos\omega t-i\sin\omega t)$$

$$y=(C_1+C_2)\cos\omega t+i(C_1-C_2)\sin\omega t$$

$$C_1=-C_2=-i\frac{A}{2}(A\,lib.\,reál.\,číslo)$$

$$y=A\sin\omega t$$

Rychlost a zrychlení kmitů

$v=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(A\sin\omega t)$

$a=\frac{(d^2 y)}{dt^2}=\frac{d}{dt}(A\omega\cos\omega t)$

Energie
kinetická

$$W_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(A\omega\cos\omega t)^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2\omega t$$

potencionální

$$W_p(\vec{r})=W_y=\frac{1}{2}ky^2=\frac{1}{2}k(A\sin\omega t)^2=\frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2\omega t$$

celková

$$W=W_k+W_p=\frac{1}{2}m\omega^2 A^2=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_m^2$$

Reálný (tlumený) harmonický oscilátor

Viskozní tření

$\vec{F}_t = -B\vec{v} = -B\frac{(d\vec{r})}{dt}$ brzdící síla. Velikost třecí síly úměrná rychlosti.

Pohybová rovnice

$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega^2 y = 0$ tlum. kmitů

charakteristická rce

$\alpha^2 + 2b\alpha + \omega^2 = 0$

Konstanta útlumu

$\frac{B}{m} = 2b$ vyjadřuje intenzitu účinku brzdících sil

Vlastní úhlová frekvence

$\frac{k}{m} = \omega^2$

Tvar řešení pro malé tlumení (b< ω)

$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2}$ úhlová frekvence tlumených kmitů

$y = Ae^{-bt}\sin(\omega_1 t + \varphi_0)$ tlumené kmity

Amplituda a perioda tlumených kmitů

$A_1 = Ae^{-bt}$

$T_1 = \frac{(2\pi)}{\omega_1} = \frac{(2\pi)}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} \geq \frac{(2\pi)}{\omega} = T$ T_1 není úplně perioda, protože amplituda klesá → průběh fce se neopakuje

Útlum a logaritmický dekrement

$\lambda = \frac{(y(t))}{y}(t + T_1) = e^{+bT_1}$ útlum

$\delta = \ln\lambda = bT_1 = 2\pi\frac{b}{\omega_1}$ logaritmický dekrement

$b = \frac{\delta}{T_1} = \ln\frac{\lambda}{T_1}$ konstanta útlumu

Celková energie kmitů a ztráta energie

$W = \frac{1}{2}m\omega_1^2 A^2 e^{-2bt}$ energie tlumeného oscilátoru

$W_1 = |\frac{(dW)}{dt}|T_1 = 2bWT_1 = \frac{(2bW\,2\pi)}{\omega_1} = \frac{(4\pi bW)}{\omega_1}$ ztráta energie za jednu periodu

Kvalita oscilátoru

$Q = 2\pi\frac{W_{stř}}{W_1}$

Velmi malé tlumení (b << ω)

$Q = \frac{\omega}{2b}$ kvalita oscilátoru >>1 – kmity se tlumí velmi pomalu

Velké tlumení (b > ω)

$y = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$ vrací se zvolna zpět do rovnovážné polohy, aniž by překmitnul do opačné výchylky. Takový pohyb se nazývá aperiodický.

Kritické mezní tlumení (b = ω)

$y = C_1 e^{-bt} + C_2 te^{-bt} = (C_1 + C_2 t)e^{-bt}$ pohyb je opět aperiodický, funkce však klesá k nule nejrychlejším možným způsobem

Nucené kmity

Periodické buzení

$F_b = F_0 \sin \Omega t$

Pohybová rovnice nucených kmitů

$$\ddot{y} + 2b\,\dot{y} + \omega^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t$$

Obecné řešení nucených kmitů

$y = C e^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + A \sin(\Omega t + \Phi_0)$ první část zastupuje tlumené kmity, druhá budící sílu

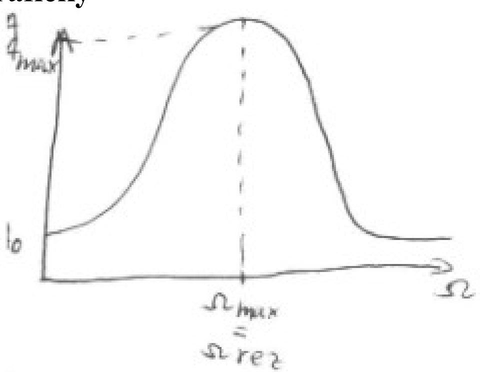
Ustálený stav

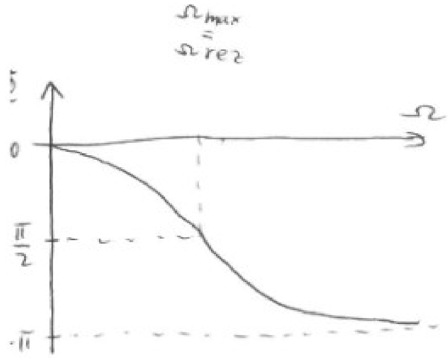
$y = A \sin(\omega t + \Phi_0)$ partik. řešení dif. rce

Výsledná amplituda a fázová konstanta kmitů

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}} \qquad tg\,\Phi_0 = \frac{-(2b\,\Omega)}{(\omega^2 - \Omega^2)}$$

Graficky





Počáteční amplituda jako amplituda vlastních kmitů

$A_0(\Omega = 0) = \frac{F_0}{k}$ jako by nebyly tlumené

Amplitudová rezonance
je vidět z obrázku (levého)

Rezonanční frekvence a rezonanční maximum

$\Omega_{max} = \Omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2b^2}$

$A_{max} = \frac{F_0}{(2mb\,\omega_1)}$ max amplitudové rezonance

$(\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2})$ lze dosadit ↑

Speciálně při velmi malém tlumení (b << ω)

$\omega_{rez} \approx \omega \qquad \omega_1 \approx \omega \qquad Q = \frac{\omega}{2b}$ kvalita oscilátoru >>1

$A_{max} = A_0 Q$ maximum amplitudové rezonance

Využití v elektrotechnice pro pásmové filtry.

Aplikace na elektronický rezonanční RLC obvod

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{(\Omega C)} - \Omega L\right)^2 + R^2}}$$ Ohmův zákon pro střídavý obvod

Skládání rovnoběžných kmitů

Kmity stejné frekvence

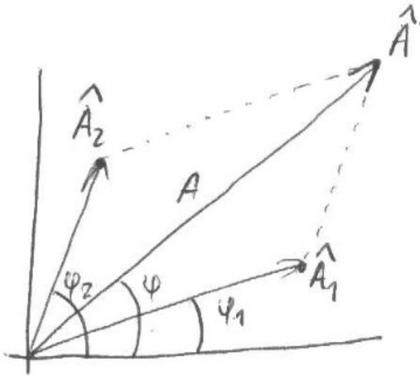
$\hat{u}=\hat{u}_1+\hat{u}_2=\hat{A}_2 e^{i\omega t}=(\hat{A}_1+\hat{A}_2)e^{i\omega t}$

-komplexní tvar výsledných kmitů

$\hat{u}=(\hat{A}_1+\hat{A}_2)e^{i\omega t}=\hat{A}e^{i\omega t}=\hat{A}e^{i\varphi}e^{i\omega t}$

$A e^{i\varphi}=A_1 e^{i\varphi_1}+A_2 e^{i\varphi_2}$ výsledná komplexní amplituda

Graficky:



Podmínka extrémů

$\varphi_2-\varphi_1=\pm 2\text{n}\,\pi$ max

$\varphi_2-\varphi_1=\pm(2\text{n}+1)\pi$ min

Kmity různé frekvence

$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_1}{n_2}$ podmínka periodičnosti

Blízké frekvence

kmity blízké frekvence ↓

$\omega_1\neq\omega_2\,,\,\omega_1\rightarrow\omega_2$

$y=2\text{A}\cos\omega_0 t\sin\omega t$

$A'=2\text{A}\cos\omega_0 t$ amplituda kmitů blízké frekvence

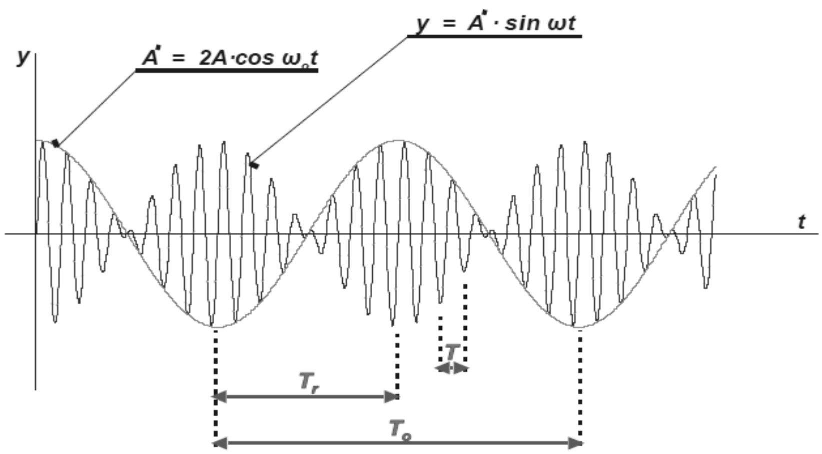
$y=A'\sin\omega t$ kmity blízké frekvence

$\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}=\omega\approx\omega_1\approx\omega_2$

$\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}=0\rightarrow 0$

skládání 2 kmitů blízké f nejsou matenaticky harmonické kmity, ale protože zjevne platí tyto ↑ 2 podmínky, lze je interpretovat jako přibližně harmonické.

Graficky:



Frekvence rázů

$f_r=f_1-f_2$

Vlnění pružného prostředí

Vznik vlnění
vychýlíme 1 bod soustavy z rovnovážné polohy, a tak se vlnění začne šířit do celé soustavy

Huygensův princip
Předpokládá, že v každém okamžiku lze každý bod na čele šířící se vlny chápat jako nový zdroj vlnění (sekundárních vln).

Lineárně polarizované postupné vlnění v bodové řadě

$u(x,t)=A\sin\omega(t-\frac{x}{c})$ c – rychlost šíření výchylky

$t'=\frac{x}{c}$ časové zpoždění kmitů – bod ve vzdálenosti x totiž nezačne kmitat v době spuštění

Různé tvary rovnice vlnění

$u(x,t)=A\sin(\omega t-\frac{(\omega x)}{c})$ po roznásobení

$u(x,t)=A\sin(\omega t+\frac{(\omega x)}{c})$ v záporném směru osy x

$u(x,t)=A\sin(\omega t-kx)$

$u(x,t)=A\sin(\omega t-kx+\varphi_0)$

$\hat{u}(x,t)=A\,e^{\pm i(\omega t\pm kx+\varphi_0)}$ komplexní tvar

Fázová rychlost
-rychlost, kterou se přemisťuje fáze vlnění

$c=\lambda v=\frac{\omega}{k}$ λ – vlnová délka, v – frekvence, k – vlnový vektor

Vlnová délka

$\lambda=\frac{(2\pi c)}{\omega}=\frac{(2\pi c)}{(2\pi f)}=\frac{c}{f}=cT$ perioda – vzdálenost mezi místy stejné fáze vlnění

Úhlový vlnočet

$k=\frac{\omega}{c}=\frac{(2\pi f)}{c}=\frac{(2\pi)}{\lambda}=2\pi\sigma$ úhl. vlnočet – podíl úhlové frekvence a fázové rychlosti

Neharmonické vlnění

$u_0=f(t)$ $u(x,t)=f(t\pm\frac{x}{c})$ vyjadřuje časové předbíhání (zpožďování) v místě x oproti 0

Vlnění v prostoru
Vlnění se šíří do všech směrů po vlnoplochách, které mají všude stejnou výchylku, zpoždění, fázi.

Vlnoplocha je geometrické místo kmitů stejné fáze
Paprsek je přímka ležící ve směru vlnění v daném místě. Je kolmý k vlnoplochám. Je vlastně jednoduchá bodová řada.

Kulová vlna
nejčastější tvar vlnoploch. Vzniká, když se vlnění šíří všemi směry stejnou fázovou rychlostí

Rovinná vlna
ve velké vzdálenosti od zdroje lze v malé objemové části prostředí. Čím menší část, tím přesnější.

Vlnová rovnice

$$\frac{(d^2 u)}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{(d^2 u)}{dt^2}$$ nejjednodušší tvar

$$\Delta \vec{u} = \frac{1}{c^2} \frac{(d^2 \vec{u})}{dt^2}$$ obecný tvar

platí pro všechny druhy vlnění

Skládání (interference) vlnění
Jde o skládání několika různých kmitů od různých zdrojů v určitém místě.

$$|x_1 - x_2| = n\lambda = 2\mathrm{n}\frac{\lambda}{2}$$ podmínka maxima interference

$$|x_1 - x_2| = (2\mathrm{n}+1)\frac{\lambda}{2}$$ podmínka minima interference