Kinematika hmotného bodu

Polohový vektor (průvodič)
určuje polohu hmotného bodu v prostoru

$\vec{r}=(x, y, z)$ pomocí souřadnic

$\vec{r}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$ po složkách

$\vec{r}=\vec{r}_0 r \Rightarrow \vec{r}_0=\frac{\vec{r}}{r}$ jednotkový průvodič

$|\vec{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ velikost průvodiče

Dráha pohybu

x = x(t) parametrické rovnice dráhy
y = y(t)
z = z(t) $d\vec{r}=d\vec{s} \Rightarrow s=s(t)$

Diferenciály a derivace fyzikálních veličin

$v=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{(\Delta s)}{(\Delta t)}\right)=\frac{ds}{dt}$ okamžitá rychlost podíl veličin na nekonečně malé části veličiny

Rychlost a zrychlení

$\vec{v}=\frac{(d\vec{r})}{dt}=\dot{\vec{r}}$ $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)=\left(\frac{(dx)}{dt}, \frac{(dy)}{dt}, \frac{(dz)}{dt}\right)=(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$ velikost vektoru zrychlení

$\vec{a}=\frac{(d\vec{v})}{dt}=\frac{(d^2\vec{r})}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}$ zrychlení

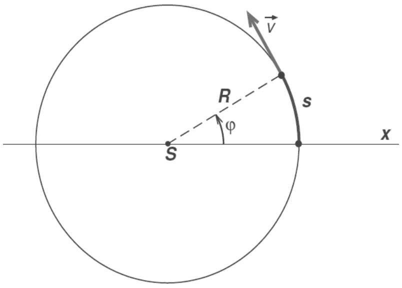
Tečné a normálové zrychlení

$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$ ke středu kružnice pohybu $a_n=\frac{V^2}{R}$ tečna k dráze

$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2}{R}\vec{n}$ rozklad vektoru zrychlení

$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$ velikost vektoru zrychlení

Kruhový pohyb



$\varphi=\frac{s}{R} \Rightarrow s=\varphi R\downarrow$

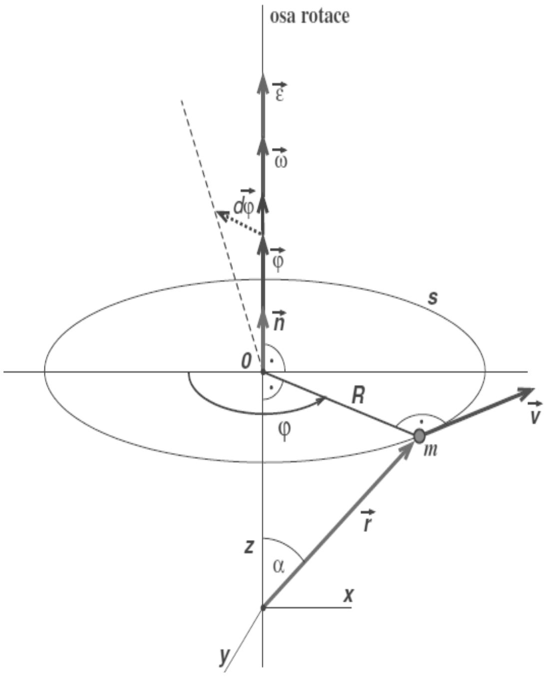
$\frac{ds}{dt}=R\frac{(d\varphi)}{dt}\downarrow \Rightarrow v=R\omega$

$\frac{dv}{dt}=R\frac{(d\omega)}{dt} \Rightarrow \epsilon=R\frac{(d\omega)}{dt}$

$a_\tau=\frac{dv}{dt}=R\epsilon$ $a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(R^2\omega^2)}{R}=R\omega^2$

kruhový (rotační) pohyb je úhlovými veličinami (φ,ω,ε) dostatečně popsán – tj. umíme z nich jednoznačně určit všechny dráhové veličiny (s,v,a).

Úhlové veličiny jako vektory



$\vec{\varphi}=\varphi\vec{n}$ vektor opsaného úhlu

$\vec{\omega}=\frac{(d\vec{\varphi})}{dt}$ vektor úhlové rychlosti

$\vec{\epsilon}=\frac{(d\vec{\omega})}{dt}$ vektor úhlového zrychlení

$\vec{\epsilon}\|\vec{\omega}\|\vec{\varphi}$

$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ obvodová rychlost

$\vec{a}_{\tau}=\vec{\epsilon}\times\vec{r}$ tečné zrychlení

$\vec{a}_n=\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$ normálové zrychlení

Dynamika hmotného bodu

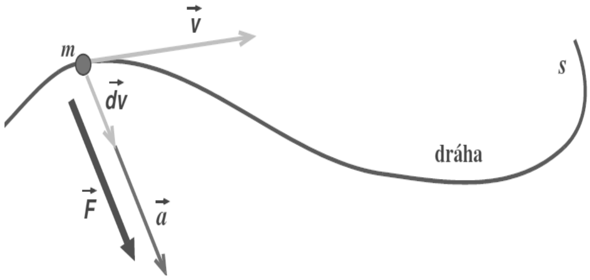
Newtonovy zákony

1) **zákon setrvačnosti**

Těleso setrvává v klidu nebo v pohybu rovnoměrním přímočarém, pokud není nuceno působením okolních těles svůj stav změnit.
Klid nebo pohyb závisí na volbě soustavy souřadnic. Je relativní.
-inerciální soustavy
Existence absolutního prostoru
-předpoklad všech nechanických dějů $\vec{v}=konstantní$
-rovnoměrně plyne ve všech soustavách

2) **zákon síly (pohybová rce)**

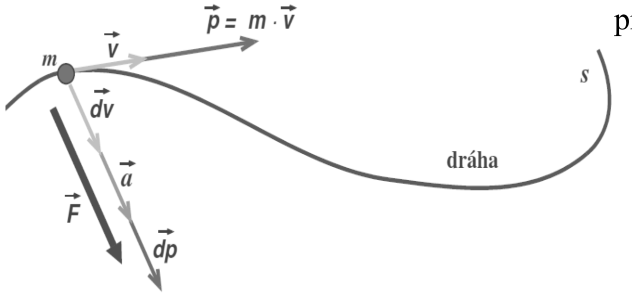
$\vec{F}=m\vec{a}$ vektorová fce
Okamžité zrychlení je příо úměrné působící síle (a nepřímo úměrné setrvačné hm. Tělesa)



$F_x=m a_x=m\ddot{x}$
$F_y=m a_y=m\ddot{y}$ pohybové rce
$F_z=m a_z=m\ddot{z}$

$x=x(t)$
$y=y(t)$ param.rce
$z=z(t)$

hybnost
$\vec{p}=m\vec{v}$ hm. bodu



pro časovou změnu platí:

$$\frac{(d\,\vec{p})}{dt}=m\frac{(d\,\vec{v})}{dt}=m\vec{a}$$

$$\vec{F}=\frac{(d\,\vec{p})}{dt}$$ **zákon síly**

3) **zákon akce a reakce**

Jestliže jedno těleso působí na druhé silou $\vec{F}$, pak druhé těleso působí na první silou stejně velkou, ale opačnou $-\vec{F}$
$\vec{G}=m\vec{g}$ tíha tělesa (grav. síla)
přitažlivá síla musí splňovat gravitační zákon:

$$G=Fg=\kappa\frac{Mm}{r^2}=m\kappa\frac{M}{r^2}$$

$$g=\kappa\frac{M}{r^2}=\kappa\frac{M}{r_Z^2}\approx 9{,}81\,ms^{-2}$$

Základní úkol dynamiky
Sestavení a vyřešení pohybových rovnic.

Dostředivá a odstředivá síla

$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$
$\vec{F}=m(\vec{a}_\tau+\vec{a}_n)=m\vec{a}_\tau+m\vec{a}_n=\vec{F}_\tau+\vec{F}_n$

$\vec{F}_\tau = m\,\vec{a}_\tau = m\frac{dv}{dt}\vec{\tau}$ tečná síla

$\vec{F}_n = \vec{F}_d = m\,\vec{a}_n = m\frac{v^2}{R}\vec{u}$ dostředivá síla

odstředivá síla – reakce k dostředivé

Moment síly a moment hybnosti

Otáčivý účinek síly je úměrný její velikosti a kolmé vzdálenosti od osy rotace →

$M = F\,d = F\,r\sin\alpha = R\,F\,\tau$ moment síly

$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$ moment síly vektorově

zhodnocení „míry odstředivého pohybu“, analogicky:

$\vec{b} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\,\vec{v}$ moment hybnosti

Pohybová rovnice rotace

derivace $\vec{b} = \vec{r}\times m\,\vec{v}$

$$\frac{(d\,\vec{b})}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\,\vec{v}) = \frac{(d\,\vec{r})}{dt}\times m\,\vec{v} + \vec{r}\,\frac{(d\,(m\,\vec{v}))}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$\frac{(d\,\vec{b})}{dt} = \vec{M}$ pohybová rovnice rotačního pohybu

Časová změna momentu hybnosti hmotného bodu je rovna momentu působící síly.

Impulz síly a změna hybnosti

$I = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt = F\,\Delta t$ impuls síly

$\uparrow \vec{I} = \Delta\,\vec{p} \rightarrow \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\,\vec{v}_2 - m\,\vec{v}_1$ změna hybnosti

$\vec{I} = F\,\Delta t = \Delta\,\vec{p} = m\,\Delta\,\vec{v}$

Inerciální a neinerciální soustavy

Obecné vztahy mezi dvěma soustavami

S' se pohybuje vůči S rychlostí $\vec{u}$ (unášivá rychlost)

$\vec{r}=\vec{r}\,'+\vec{R}$ $\quad \frac{(d\,\vec{r})}{dt}=\vec{v}$ $\quad \frac{(d\,\vec{r}\,')}{dt}=\frac{(d\,'\vec{r}\,')}{dt}=\vec{v}\,'$

$\frac{(d\,\vec{R})}{dt}=\vec{u}$ unášivá rychlost soustavy S' $\quad \vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{u}$

$\frac{(d\,\vec{v})}{dt}=\vec{a}$ $\quad \frac{(d\,\vec{v}\,')}{dt}=\vec{a}\,'$ $\quad \frac{(d\,\vec{u})}{dt}=\vec{a}_u$ $\quad \vec{a}=\vec{a}\,'+\vec{a}_u$

Platnost Newtonových zákonů

$\vec{u}=konst.$

rovnoměrný přímočarý pohyb $\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{u}$ → 1. NZ platí i v S' → soustava S' je inerciální (inercie = setrvačnost)

$m\,\vec{a}\,'=m\,\vec{a}=\vec{F}=\vec{F}\,'$ → 2. NZ platí také v S', poh. Rce je stejná ve všech inerc. Soustavách

Invariance pohybové rovnice

pohybové rovnice jsou invariantní vůči Galileově transformaci

Galileova transformace

rovnoměrný přímočarý pohyb

$$x'=x-u_x t \qquad\qquad x=x'+u_x t$$
$$y'=y-u_y t \qquad \text{inverzní:} \qquad y=y'+u_y t$$
$$z'=z-u_z t \qquad\qquad z=z'+u_z t$$
$$t=t' \qquad\qquad t=t'$$

Setrvačné síly při translaci (posuvný pohyb) a rotaci

nerovnoměrný křivočarý pohyb $\vec{u}\neq konst.$ $\quad \frac{(d\,\vec{u})}{dt}=\vec{a}_u\neq 0$

Zákon setrvačnosti tedy v S' neplatí → S' je neinerciální soustava

$\vec{F}=-m\,\vec{a}_u$ $\qquad m\,\vec{a}\,'=\vec{F}\,'+\vec{F}+\vec{F}$

setrvačná síla $\qquad$ pohybová rce v neinerciální soustavě

Pohyb. rce již není invariantní.

Konst. velikost, proměnlivý směr

u = konst $\vec{F}_n=-m\,\vec{a}_n=-m\,\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$ odstředivá síla

nerovnoměrný křivočarý

$\vec{u}\neq konst.$ $\quad \vec{F}_\tau=-m\,\vec{a}_\tau=-m\frac{du}{dt}\vec{\tau}$ Eulerova setrvačná síla

nerovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

$\vec{u}\neq konst.$ $\quad \vec{\tau}=konst$

$\vec{F}=-m\,\vec{a}_u=-m\frac{du}{dt}\vec{\tau}$ jedná se o Eulerovu setrvačnou sílu

Rotace

$\vec{r}=\vec{r}\,'$ soustavy jsou totožné

$\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{\omega}+\vec{A}$ skládání rychlostí v soustavě S

$\frac{(d\,\vec{A})}{dt}=\frac{(d\,'\vec{A})}{dt}+\vec{\omega}+\vec{A}$

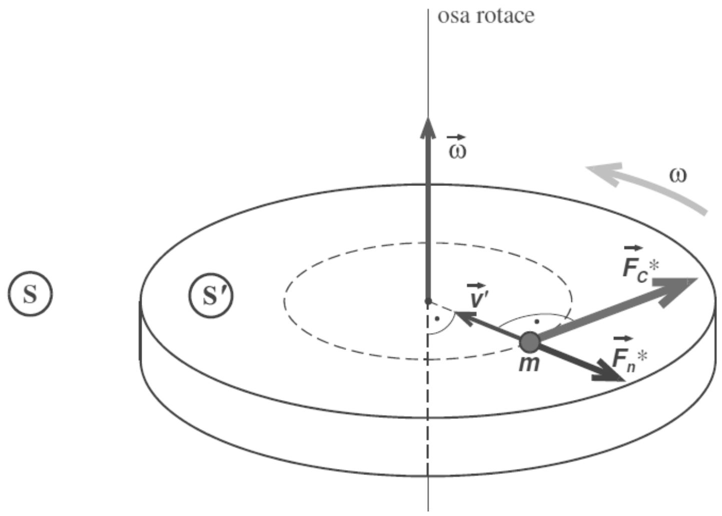
$$m\vec{a}=m\vec{a}-m\vec{\epsilon}\times\vec{r}-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})-2\mathrm{m}\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'=\vec{F}+\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_2=\vec{F}\,'$$

$\vec{F}_1=\vec{F}_\tau=-m\vec{\epsilon}\times\vec{r}$ Eulerova (setrvačná) síla

$\vec{F}_2=\vec{F}_n=-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ odstředivá síla

$\vec{F}_3=\vec{F}_C=-2\mathrm{m}\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$ Coriolisová síla

tato síla se objevuje pouze v případě vlastního pohybu hmotného bodu v neinerciální soustavě rychlostí, která není rovnoběžná s osou rotace.
Z důvodu relativně malé velikosti Coriolisovu sílu na povrchu Země v běžném životě přímo nepociuťjeme, přesto je to veličina dobře měřitelná a za určitých okolností může mít v nějaké technické aplikaci výrazný vliv.



Práce a energie

Definice mechanické práce

$A = \vec{F}\,\vec{s}$ mechanická práce [J]

$A = \int_S \vec{F}\, d\vec{s} = \int_S \vec{F}\, d\vec{r}$ mechanická práce na obecné dráze

$dA = \vec{F}\, d\vec{r}$ elementární práce vykonaná na diferenciálním úseku dráhy

Práce v gravitačním poli

$\vec{F} = -\kappa \frac{Mm}{r^2}\vec{r}_0$ newtonův gravitační zákon

$\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11} [SI]$ gravitační konstanta

$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}$ jednotkový vektor průvodiče

$\vec{K} = \frac{\vec{F}}{m} = -\kappa \frac{M}{r^2}\vec{r}_0$ intenzita gravitačního pole

$\uparrow \vec{g}\, (pro\, r = r_Z)$

Pojem konzervativnosti silového pole

Silové pole s takovou významnou vlastností, která umožňuje zachování, zakonzervování vykonané práce.

$A = \int_{\vec{r}_1 (S)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\, d\vec{r}$ Práce vnější síly v silovém poli

A' = -A práce potřebá pro přemístění tělesa

$\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0$ nezávislost práce na dráze

Potencionální energie a potencionál

gravitační potencionální energie

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2 - \vec{F}} d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-(-\kappa \frac{Mm}{r^2}\vec{r}_0))\, d\vec{r} = \kappa Mm \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\frac{(\vec{r}_0\, d\vec{r})}{r^2}) = \frac{-(\kappa Mm)}{r} + \frac{(\kappa Mm)}{r_1} = W_p(\vec{r}, \vec{r}_1)$$

$W_p(\vec{r}) = \frac{-(\kappa Mm)}{r}$ speciální tvar $r_1 \to \infty$

$\varphi(\vec{r}) = \frac{W_p}{m}$ gravitační potenciál **-** potenciální energie tělesa jednotkové hmotnosti - tedy práce gravitačního pole potřebná k přenesení tělesa jednotkové hmotnosti z daného místa do nekonečna.

Kinetická energie

$A' = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F\, d\vec{r} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} mv\, dv = m \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} v\, dv$

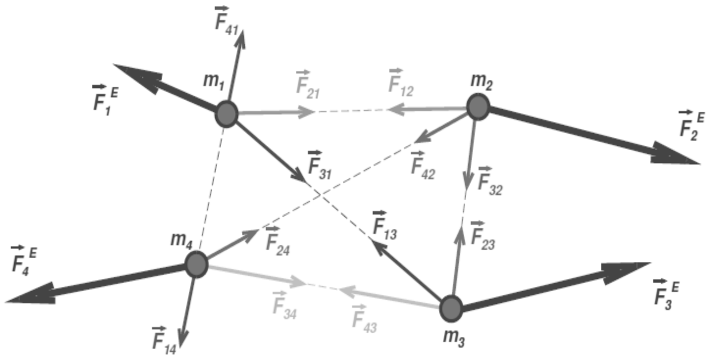
$W_k(v) = \frac{1}{2} mv^2$ schopnost tělesa vykonat práci

Zákon zachování energie

$W = W_p + W_k = konst.$

Součet potenciální a kinetické energie má v jakémkoliv místě konzervativního silového pole stále stejnou hodnotu.

Dynamika soustavy hmotných bodů



Vnitřní a vnější síly

vnější síly působí od objektů mimo soustavu $\vec{F}_2^E$

vnitřní síly působí od ostatních hm. bodů soustavy $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{32} \ldots$

$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{jk} = 0$ součet vnitř. sil = 0

Celková hybnost soustavy

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{(d\,\vec{r}_k)}{dt}$$

Výsledná vnější síla

$$\vec{F}^E = \vec{F}_1^E + \vec{F}_2^E + \ldots + \vec{F}_N^E = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^E$$

1. impulzová věta

Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů (za jednotku času) je rovna výsledné vnější síle.

$$\frac{(d\,\vec{P})}{dt} = \vec{F}^E$$

Vlastnosti těžiště

$m_0 = \sum_{k=1}^{N} m_k$ hmotnost $\vec{r}_0$ poloha $\vec{v}_0 = \frac{(d\,\vec{r}_0)}{dt}$ rychlost

Těžiště je nejjednodušší působiště gravitační tíhy tělesa.

$\vec{p}_0 = m\vec{v}_0 = m\frac{(d\,\vec{r}_0)}{dt}$ hybnost $p_0 = \vec{P}$ hybnost těžiště je rovna celkové hybnosti

Těžiště je rovnovážným bodem tělesa.

$\vec{r}_0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k$ poloha hmotného bodu (těžiště) soustavy

$\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k{}' \times \vec{G}_k = 0$ rovnováha tíhových sil vzhledem k těžišti

Pohybová rovnice těžiště

$m\frac{(d^2\vec{r}_0)}{dt^2} = \vec{F}^E$ Těžiště se pohybuje jako hmotný bod o hmotnosti celé soustavy, na který působí výsledná vnější síla.

Translace

První věta impulsová, jako rovnice těžiště, uruje translaci soustavy hm. bodů.
<u>První věta impulsová je pohybovou rovnicí translace.</u>

Obecný pohyb

Obecný pohyb je složený z translace a rotace kolem osy jdoucí těžištěm.

Rotace

$$\frac{(d\,\vec{b})}{dt}=\vec{M}$$ pohybová rce pro rotaci

$$\vec{b}_k=\vec{r}_k\times\vec{p}_k=\vec{r}_k\times m_k\vec{v}_k=r_k\times m_k\frac{(d\,\vec{r}_k)}{dt}$$ moment hybnosti k-tého bodu soustavy

$$\vec{M}_k=\vec{r}_k\times\vec{F}_k$$ moment síly působící na k-tý bod soustavy

Celkový moment hybosti

$$B=\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k=\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times m_k\frac{(d\,r_k)}{dt}$$

Výsledný moment síly

$$\vec{M}^E=\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times\vec{F}_k^E$$

2. impulsová věta

$$\frac{(d\,\vec{B})}{dt}=\vec{M}^E$$ pohybová věta rotace

Časová změna celkového momentu hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výslednému momentu vnějších sil.
Obě impulsové věty jsou invariantní vzhledem ke Galileově transformaci.

Aplikace impulsových vět

Obecný pohyb soustavy hmotných bodů
translace – 1. impulsová věta
rotace – 2. impulsová věta
Transformace 2. impulsové věty do těžišťové souřadné soustavy

$$\frac{(d\vec{B})}{dt}=\vec{M}^E \qquad \text{po dosazení:} \qquad \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times m_k\frac{(d\vec{r}_k)}{dt}=\sum_{k=1}^{N} r_k\times\vec{F}_k^E$$

2. impulsová věta v těžišťové soustavě

$$\begin{aligned}\vec{r}&=\vec{R}+\vec{r}\,'\\ \vec{r}_k&=\vec{r}_0+\vec{r}_k\,'\end{aligned} \qquad \text{dosadíme} \uparrow \qquad \sum_{k=1}^{N}(\vec{r}_0+\vec{r}_k\,')\times\vec{F}_k^E$$

$$\frac{(d\vec{B}\,')}{dt}=\vec{M}\,'^E \qquad \text{v těžišťové soustavě}$$

Vztah rotace a translace
Vlastní pohyb těžiště nemá vliv na rotaci soustavy hm. bodů kolem osy jdoucí těžištěm.

Izolovaná soustava
-nepůsobí žádná vnější síla
$\vec{P}=konst.$ zákon zachování hybnosti
$\vec{B}=konst.$ zákon zachování momentu hybnosti
$\vec{P}_0=konst.$ zákon zachování setrvačnosti (těžiště)

Podmínky rovnováhy

$$\vec{F}^E=\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^E=0$$

$$\vec{M}^E=\sum_{k=1}^{N}\vec{M}_k^E=0$$

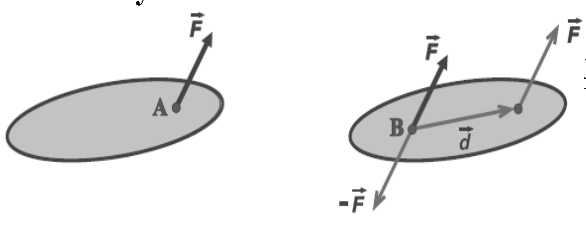
Rovnováha znammená nejen rovnováhu vnějších sil, ale i rovnováhu jejích momentů.

Ekvivalentní soustava sil – těžiště jako působiště tíhy
Vnější síly nahrazeny jiným souborem sil, který má na těleso stejný pohybový účinek.

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{r}\,'_k\times\vec{G}_k=0 \qquad \text{těžiště jako „bod rovnováhy" gravitačních sil}$$

$\vec{M}=\vec{d}\times\vec{F}$ moment dvojice sil

Posunutí síly



Musíme připojit dvojici sil se stejným momentem, jako měla původní síla vzhledem k tomuto novému bodu.

Dynamika tuhého tělesa

Tuhá soustava hmotných bodů
-neměnné vzdálenosti mezi body
-konstantní průvodiče mezi jednotlivými body
Těžiště

$\vec{r}_0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k = konst$ těžiště má také konstantní polohu

Obecný pohyb
-rozklad na translační a rotační
-podmínky klidové rovnováhy platí
-lze využít vztahy izolované soustavy
-ekvivalentní soustavy sil

Kinetická energie tělesa

$W_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ při translaci

$W_{kin} = \frac{1}{2} J \omega^2$ při rotaci

$W_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$ celková

Moment setrvačnosti

$J = \sum_{k=1}^{N} m_k R_k^2$

Steinerova věta

$J' = J + m a^2$ dokazuje minimální hodnotu momentu setrvačnosti pro osu jdoucí těžištěm

Pohybové rovnice pro rotaci a translaci tělesa

$m \frac{(d^2 \vec{r}_0)}{dt^2} = \vec{F}^E$ těžiště (1. pohybová rce tělesa)

$\frac{(d \vec{B})}{dt} = \vec{M}^E$ 2. věta impulsová

$J \vec{\epsilon} = \vec{M}_{\parallel}^E$ pohybová rce pro rotaci kolem pevné osy (2. pohybová rce tělesa)

Přechod k reálnému tělesu

$\rho = \frac{dm}{dV}$ hustota hmoty

$m = \int \int_V \int \rho \, dV$ celková hmotnost tělesa

$\vec{r}_0 = \frac{1}{m} \int \int_V \int \vec{r} \rho \, dV$ těžiště

$J = \int \int_V \int R^2 \rho \, dV$ moment setrvačnosti

Fyzické a matematické kyvadlo

$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$ pohybová rovnice fyzického kyvadla

$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$ pohybová rovnice fyzického kyvada pro malé výchylky

$T = \frac{(2\pi)}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{lmg}}$ doba kmitu fyzického kyvadla (malé výchylky)

$T_k = \frac{T}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{J}{lmg}}$ doba kyvu fyzického kyvadla (malé výchylky)

$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ doba kmitu matematického kyvadla (malé výchylky)

$l_{red} = \frac{J}{lm}$ redukovaná délka fyz. kyvadla – taková délka, že mat. kyvadlo má stejnou dobu kmitu

$g = \frac{(4\pi^2 l_{red})}{T^2}$ gravitační tíhové zrychlení