Skládání rovnoběžných kmitů

Principiálně se nejedná o žádný nový problém, ať jsou kmity rovnoběžné, nebo různoběžné (viz další kapitola), vždy vlastně jde o obyčejné ***skládání mechanických pohybů*** , které je běžné v technické praxi a často užívané ve školních příkladech (plavec plave přes řeku, vrh svislý a šikmý, pohyb po spirále, …).

Uvědomme si, že podle 2. Newtonova zákona je každý pohyb důsledkem určité působící síly a podle ***principu superpozice*** jsou všechny pohyby, které chceme skládat, vzájemně zcela nezávislé .

Proto tedy můžeme každý jednotlivý (dílčí) pohyb vypočítat zcela samostatně, pouze z pohybové rovnice s příslušnou silou (která ho způsobuje) - a závěrem pak všechny dílčí pohyby v libovolném pořadí složíme (sečteme).

Nyní si tedy představme určitou modelovou situaci, kdy na jediný hmotný bod působí dvě nezávislé pružné síly ve stejném směru (osy y). Předpokládejme obecně různé síly, tj. s různými konstantami pružnosti :

$$F_1 = -k_1 \cdot y$$
$$F_2 = -k_2 \cdot y$$

Výsledkem samostatného působení každé této síly na hmotný bod jsou potom kmity obecně vzájemně odlišných vlastností :

$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Kde pro úhlové frekvence platí standardní výrazy :

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m} \qquad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m}$$

V tomto jednoduchém případě dvou jednorozměrných pohybů v jedné ose, získáme ***výsledný pohyb*** prostým **skalárním součtem** obou jednotlivých výchylek hmotného bodu - a bude to opět jednorozměrný pohyb ve stejné ose (y) :

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

Hlavním parametrem, který rozhodne o konkrétním výsledku tohoto součtu, je frekvence obou dílčích kmitů. Rozlišíme proto dva zásadní případy :

1) Skládání rovnoběžných kmitů stejné frekvence

V tomto případě tedy bude :

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

Výchozí kmity jsou potom popsány rovnicemi :

$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

A pro výsledný pohyb platí rovnice :

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)}$$

Jde zřejmě o nejjednodušší možný případ skládání rovnoběžných kmitů. Již při diskusi pohybové rovnice harmonického oscilátoru jsme došli k závěru, že součtem dvou sinusovek stejné frekvence je opět sinusovka nezměněné frekvence (má ale jinou amplitudu a fázovou konstantu).

Použijeme tedy opakovaně součtové vzorce :

$$\begin{aligned} y &= A_1 (\sin\omega t \cdot \cos\varphi_1 + \cos\omega t \cdot \sin\varphi_1) + A_2 (\sin\omega t \cdot \cos\varphi_2 + \cos\omega t \cdot \sin\varphi_2) = \\ &= \sin\omega t \cdot (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 .) + \cos\omega t \cdot (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2) = \\ &= \sin\omega t \cdot A\cos\varphi + \cos\omega t \cdot A\sin\varphi = \\ &= A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Výpočet tak potvrzuje, že **výsledný pohyb je skutečně opět harmonickým pohybem** stejné frekvence jako výchozí kmity. Jeho amplituda a fázová konstanta jsou určeny dvěma vztahy, které jsme použili při výpočtu (viz výše) :

$$A\cos\varphi = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2$$
$$A\sin\varphi = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2$$

Dostáváme dvě rovnice pro dvě neznámé (A, φ), jejich vyřešení se ale nebudeme věnovat. Je zřejmé, že používání goniometrických funkcí s reálnými výchylkami vede k cíli poněkud těžkopádnou cestou.

Ukažme si dále, jak naopak **použití komplexních funkcí** při skládání kmitů je velmi jednoduché a elegantní :

Nejprve oběma jednotlivým kmitům přiřadíme ***komplexní tvary*** (komplexní funkce) :

$$\hat{u}_1 = A_1 \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t + \varphi_1)} = A_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = \hat{A}_1 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$$
$$\hat{u}_2 = A_2 \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t + \varphi_2)} = A_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = \hat{A}_2 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$$

Potom ***komplexní tvar výsledných kmitů*** bude jejich součtem :

$$\boxed{\hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 = \hat{A}_1 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} + \hat{A}_2 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}}$$

Vidíme, že právě **<u>stejná frekvence</u>** kmitů umožňuje <u>vytknutí</u> exponenciely a <u>sečtení</u> obou komplexních amplitud do výsledného komplexního čísla - které opět - jako každé komplexní číslo - může být zapsáno ve tvaru komplexní amplitudy, obsahující (nyní skalární) <u>amplitudu výsledných kmitů</u> A a jejich fázovou konstantu φ :

$$\boxed{\hat{u} = (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = A \cdot e^{i \cdot \varphi} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}}$$

Vzniklý standardní tvar komplexního zápisu kmitů tedy opakovaně a velmi jednoduše dokazuje, že **<u>výsledné kmity jsou opět harmonické se stejnou frekvencí</u>** jako oba původní kmity.

Přitom ***<u>výsledná komplexní amplituda je součtem obou počátečních komplexních amplitud</u>*** :

$$\boxed{\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2}$$

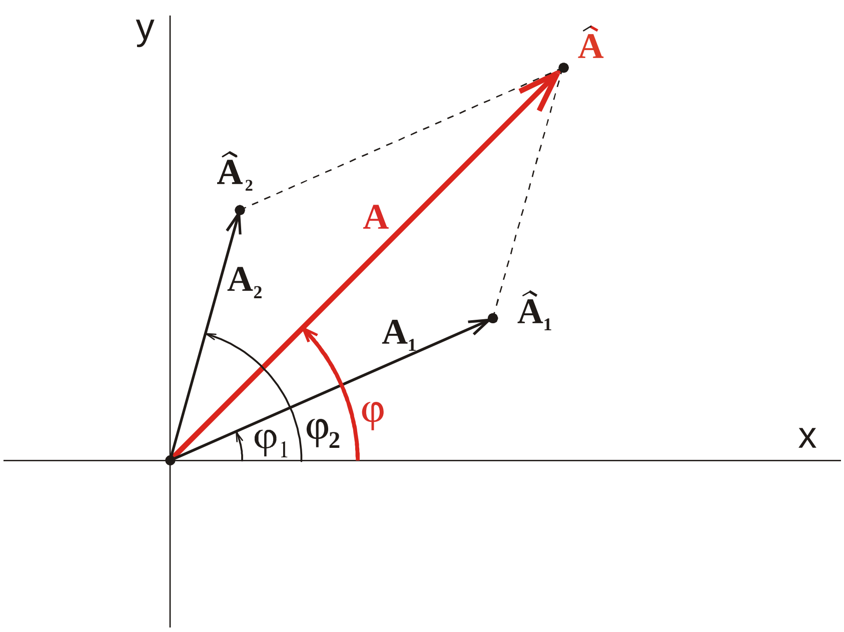
<u>výsledná komplexní amplituda</u>

To znamená, že výslednou amplitudu a fázovou konstantu relativně jednoduše vypočítáme z hodnot těchto veličin u počátečních výchozích kmitů :

$$\boxed{A \cdot e^{i \cdot \varphi} = A_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} + A_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}}$$

<u>výsledná komplexní amplituda</u>

Sčítání komplexních čísel samozřejmě znamená standardní sečtení jejich reálných a imaginárních částí. V tomto případě komplexních <u>exponenciel</u> je možno také s výhodou použít jejich ***<u>grafické znázornění</u>*** a ***<u>sečtení jako vektorů</u>*** , neboť amplituda kmitů je <u>absolutní hodnotou</u> komplexního čísla (délkou úsečky, vektoru) a fázová konstanta je jeho <u>argumentem</u> (úhlem, který vektor svírá s osou x) :



Amplitudu výsledných kmitů je pak možno jednoduše odečíst z grafu jako délku výsledného vektoru, nebo ji lze také vypočítat pomocí kosinové věty :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Ze vztahu vidíme výraznou závislost výsledné amplitudy na rozdílu fázových konstant kmitů, tj. na fázovém rozdílu obou kmitů :

$\boxed{\varphi_2 - \varphi_1}$ ***fázový rozdíl kmitů***

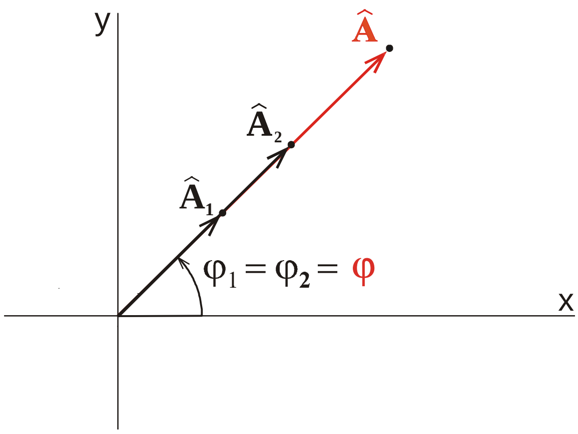
Použití komplexních amplitud ve spojení s grafickou metodou umožňuje tedy velmi rychlé stanovení výsledných parametrů kmitů, tj. výsledné (skalární) amplitudy A a výsledné fázové konstanty φ.

Použití komplexních amplitud je také velmi výhodné pro řešení následujícího problému :

Maximum a minimum výsledné amplitudy :

Zejména v technických aplikacích jsou důležité extrémní výsledné pohybové stavy, tj. stavy s maximální, nebo minimální amplitudou kmitů (u mechanických konstrukcí z toho plyne maximální, nebo minimální namáhání materiálu , v elektrických obvodech jde o zesílení, nebo zeslabení výsledného signálu, je to také princip činnost mnoha interferenčních a difrakčních přístrojů, atd.).

Právě z grafického znázornění komplexních amplitud je ihned jasné, že pro ***maximální*** výslednou amplitudu musí být oba počáteční vektory souhlasně rovnoběžné, tj. musí platit (viz obr.) :



$$\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$$

Nebo jinak :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0$$

Dostáváme podmínku pro fázový rozdíl obou kmitů. Připustíme-li obecně jeho libovolnou velikost, můžeme zobecnit :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0 \pm n.2\pi \qquad n = 0,1,2,3\ldots \text{ (celé číslo)}$$

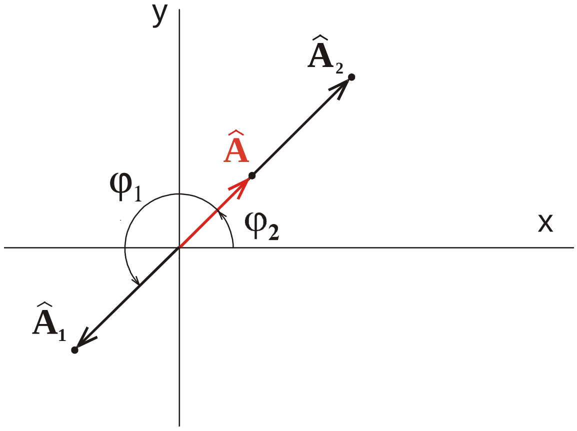
Nebo v nejjednodušším tvaru :

$$\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2n\pi}$$

podmínka maxima

Slovně : Fázový rozdíl obou kmitů je roven sudému násobku čísla π, kmity jsou tedy „ve fázi“.

Stejně lehce vidíme z grafu podmínku ***minimální*** amplitudy - počáteční vektory musí být nesouhlasně rovnoběžné :



$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi \pm n.2\pi$$

A tedy v konečném tvaru :

$$\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2n+1)\pi}$$

podmínka minima

Slovně : Fázový rozdíl kmitů je roven lichému násobku čísla π, kmity jsou tedy „v protifázi“.

Poznámka k oběma podmínkám : Znak „plus mínus“ v obou vztazích zdůrazňuje, že nezáleží na kladné, či záporné hodnotě fázového rozdílu. Pokud definujeme číslo n jako celé, kladné i záporné, můžeme také tento znak vypustit, nebo lze použít na levé straně rovnic absolutní hodnotu fázového rozdílu.

.

2) **Skládání rovnoběžných kmitů různé frekvence**

Výchozí kmity mají tedy různé frekvence, obecně i amplitudy a fázové konstanty :

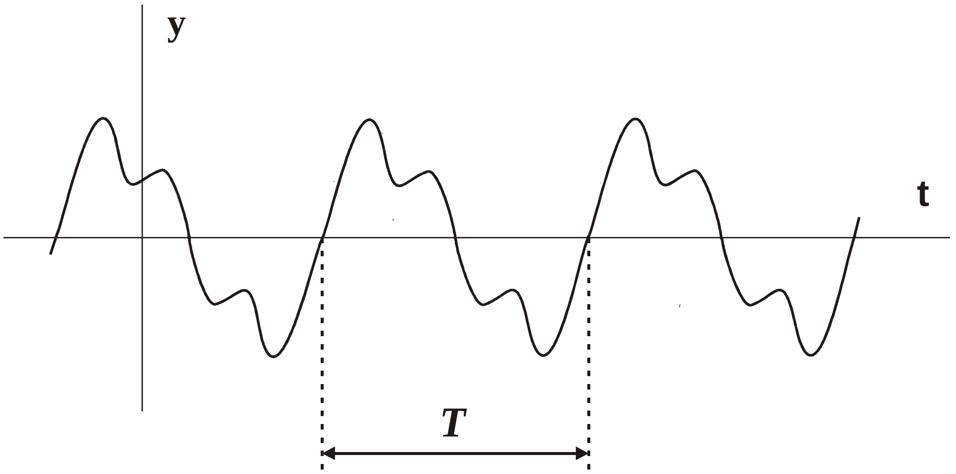
$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

A výsledný pohyb je opět jejich součtem :

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

Na rozdíl od předchozích kmitů stejné frekvence tento součet nelze vyjádřit nějakou harmonickou funkcí, nelze ho ani převést na jinou analytickou funkci, dokonce obecně ***ani nejeví periodičnost*** .

Tato vlastnost je u kmitů dosti závažná, zjistíme tedy v dalších řádcích podmínky periodičnosti. Použijeme obecnou matematickou definici periody funkce jako (nejmenšího) intervalu nezávisle proměnné, po kterém se (vždy) opakuje hodnota funkce (a její průběh, viz obr.) :



Jestliže tedy funkce $y(t)$ má mít nějakou periodu *T*, musí zřejmě vždy platit :

$$y(t) = y(t+T)$$

Dosaďme sem naši funkci vytvořenou součtem kmitů různé frekvence :

$$A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2) =$$
$$= A_1 \cdot \sin(\omega_1 (t+T) + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 (t+T) + \varphi_2)$$

Jediná možnost zajištění periodičnosti u těchto komplikovaných průběhů je zřejmě rovnost sinusovek stejné frekvence na obou stranách rovnice, tj. :

$$A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 (t+T) + \varphi_1)$$
$$A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 (t+T) + \varphi_2)$$

Dostáváme rovnost funkcí o známé periodě (2π) . Rovnost periodické funkce pro dvě hodnoty nezávisle proměnné ovšem znamená, že tyto hodnoty se liší právě o periodu, nebo o její libovolný násobek. Z toho tedy plynou následující podmínky pro fáze uvedených sinusovek :

$$\omega_1 t + \varphi_1 = \omega_1 (t+T) + \varphi_1 + n_1 2\pi$$
$$\omega_2 t + \varphi_2 = \omega_2 (t+T) + \varphi_2 + n_2 2\pi$$

kde n_1 a n_2 jsou libovolná celá čísla

Po úpravě :

$$0 = \omega_1 T + n_1 2\pi$$
$$0 = \omega_2 T + n_2 2\pi$$

Členy s frekvencemi převedeme na levou stranu a obě rovnice vydělíme :

$$\frac{\omega_1 T}{\omega_2 T} = \frac{n_1 2\pi}{n_2 2\pi}$$

Vznikne tak jednoduchá podmínka periodičnosti :

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

podmínka periodičnosti

Úhlové frekvence výchozích kmitů musí být tedy v poměru libovolných celých čísel.

Toto konstatování můžeme samozřejmě vyslovit i pro jejich ***frekvence*** nebo ***periody*** , neboť platí známé vztahy :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2\pi f_1}{2\pi f_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{1/T_1}{1/T_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

Zdálo by se, že jsme pro kmity různé frekvence vyčerpali matematické možnosti jejich popisu. Ukázala se však možnost exaktního řešení následujícího speciálního případu :

3) Skládání rovnoběžných kmitů blízké frekvence

Zde jde vlastně o předchozí problém součtu kmitů různé frekvence , který byl v principu neřešitelný :

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Použijeme však přídavný předpoklad blízkých frekvencí obou kmitů, který se velmi často vyskytuje v technických i teoretických aplikacích (velmi zajímavé a principiální jevy vznikají při vzájemném působení mírně rozladěných oscilátorů (mechanických i elektronických, vzpomeňte také na nucené kmity) a zejména pak při interferenci vlnění blízkých frekvencí – vlnové grupy, spektrální analýza) :

$$\boxed{\omega_1 \neq \omega_2 , \qquad \omega_1 \rightarrow \omega_2}$$

Vzpomeňme ještě na minulý odstavec, že situace při skládání kmitů různé frekvence je velmi komplikovaná a zjednodušme dále tento problém předpokladem stejných amplitud a stejných fázových konstant , které v principu nemohou změnit výsledek „působení“ různých frekvencí :

$$A_1 = A_2 = A$$
$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

Pak totiž dostaneme jednodušší vztahy :

$$y = A \cdot \sin \omega_1 t + A \cdot \sin \omega_2 t = A \cdot (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t)$$

A není tedy problémem použití klasických součtových vzorců pro goniometrické funkce ($\sin\alpha + \sin\beta$) :

$$y = A (2 \cdot \sin \frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2} \cdot \cos \frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}) = 2A \cdot \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2) t}{2} \cdot \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2) t}{2}$$

Jestliže označíme :

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \omega_o$$

Pak lze jednoduše zapsat výsledek :

$$\boxed{y = 2A \cdot \cos \omega_o t \cdot \sin \omega t}$$

kmity blízké frekvence

Můžeme konstatovat, že výsledek skládání dvou kmitů blízké frekvence má složitý průběh – ***matematicky to nejsou harmonické kmity*** - ale protože zjevně platí :

$$\boxed{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega \approx \omega_1 \approx \omega_2}$$

$$\boxed{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \omega_o \to 0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T_o = \frac{1}{f_o} = \frac{2\pi}{\omega_o} \to \infty}$$

lze tento výsledek interpretovat jako ***přibližně harmonické*** kmity prakticky stejné frekvence jako výchozí kmity, s velmi **pomalu proměnnou sinusovou amplitudou** (protože perioda T_o je veliká)

$$\boxed{A' = 2A \cdot \cos \omega_o t}$$

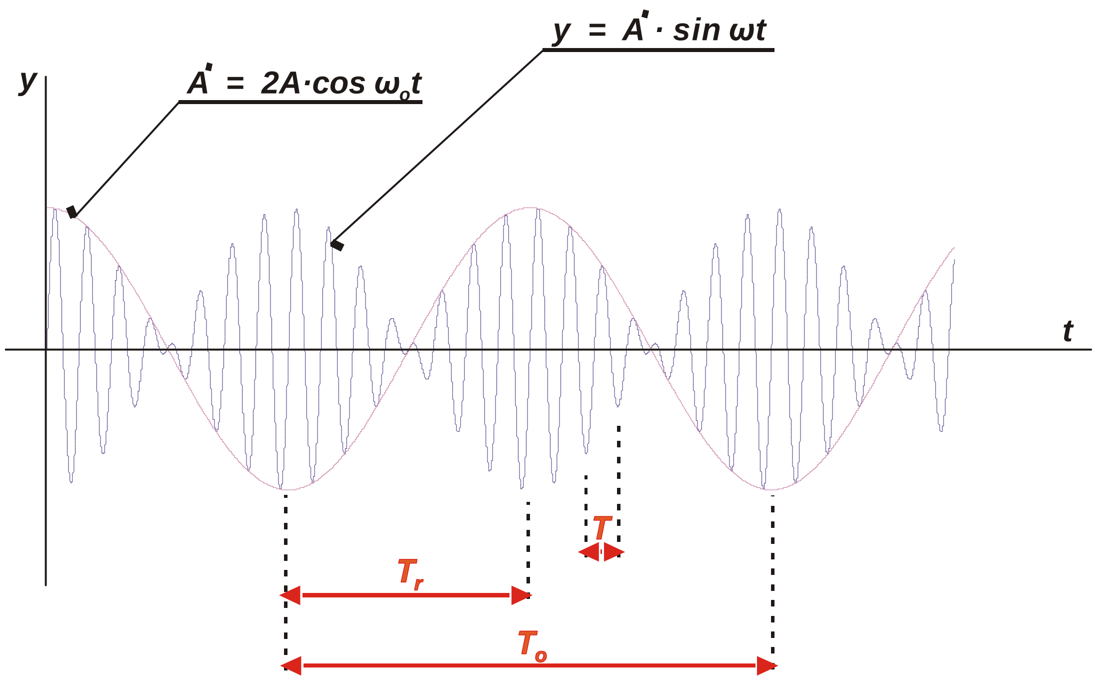
amplituda kmitů blízké frekvence

Tedy můžeme psát :

$$\boxed{y = A' \cdot \sin \omega t}$$

kmity blízké frekvence

Kmity lze také označit jako ***kvaziharmonické*** . Sinusová amplituda nízké frekvence tvoří jakousi obalovou křivku pro kmity vysoké frekvence (viz obr.). Takový výsledek dostaneme také v elektrotechnice při ***amplitudové modulaci*** .



Z obrázku vidíme, že periodické změny amplitudy (maxima) se opakují s poloviční periodou , tj. s frekvencí :

$$f_r = \frac{1}{T_r} = \frac{2}{T_o} = 2\,f_o = 2 \cdot \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{2\pi\, f_1 - 2\pi\, f_2}{2\pi} = f_1 - f_2$$

Dostáváme jednoduchý vztah pro frekvenci periodických změn amplitudy, v akustice nazývaných ***rázy*** :

$$\boxed{f_r = f_1 - f_2}$$

frekvence rázů

Vymizení rázů je tedy velmi přesným indikátorem shody frekvencí dvou kmitů.

Proto lidské ucho i bez „hudebního sluchu“ dobře pozná shodu frekvencí dvou tónů a je tedy například možno podle kalibrovaného zdroje (ladičky) dokonale naladit struny hudebního nástroje i sladit dohromady celý orchestr).

(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 01/2005, rev. 05/2008**