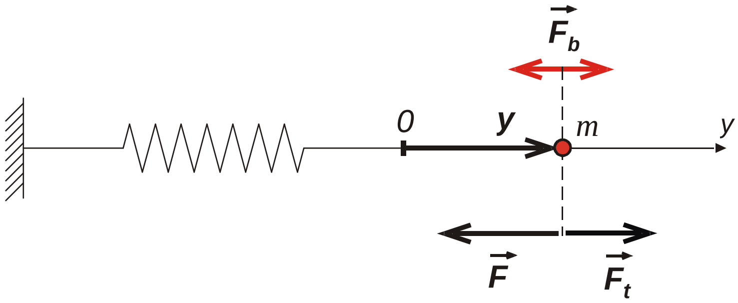
Nucené kmity

Se zmenšováním amplitudy v předchozím případě tlumených kmitů (při malém tlumení) klesá k nule také celková energie pohybu a za nějaký čas kmity vymizí . Mají-li se tedy tlumené kmity udržet, je nutné ztracenou energii doplňovat prací vnější síly . To je případ ***buzeného harmonického oscilátoru*** .



Pro dosažení konstantní výsledné amplitudy kmitů je zřejmě nutné nepřerušované průběžné působení síly, spojitě sledující pohyb hmotného bodu, průběh síly musí tedy být periodický. Nejjednodušší taková budicí síla bude mít sinusový průběh s úhlovou frekvencí Ω

$$\boxed{F_b = F_o \cdot \sin \Omega\, t}$$

harmonická budicí síla

Přidáme-li tuto sílu k pružné síle a k viskózní třecí síle, vznikne pohybová rovnice :

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \cdot y - B \cdot \frac{dy}{dt} + F_o \cdot \sin \Omega\, t$$

Po analogických úpravách jako u tlumeného oscilátoru :

$$\ddot{y} + \frac{B}{m} \cdot \dot{y} + \frac{k}{m} \cdot y = \frac{F_o}{m} \cdot \sin \Omega\, t$$

Zavedeme-li dále v rovnici také stejné konstanty jako u tlumeného oscilátoru :

$$\boxed{\frac{k}{m} = \omega^2}$$

vlastní úhlová frekvence

$$\boxed{\frac{B}{m} = 2b}$$

konstanta útlumu

Dostaneme tak konečný tvar rovnice :

$$\boxed{\ddot{y} + 2b\, \dot{y} + \omega^2 y = \frac{F_o}{m} \cdot \sin \Omega\, t}$$

pohybová rovnice nucených kmitů

Kromě pravé strany je tato rovnice shodná s diferenciální rovnicí tlumených kmitů - je to tzv. ***nehomogenní diferenciální rovnice*** . Připomeňme si opět matematické znalosti : obecné řešení takové rovnice se skládá z obecného řešení příslušné homogenní diferenciální rovnice a z jednoho partikulárního řešení nehomogenní rovnice.

Obecné řešení homogenní (bez pravé strany) diferenciální rovnice již známe , je to rovnice tlumených kmitů (budeme uvažovat jen malé tlumení, jinak by vlastně nešlo o kmity).

Partikulární řešení nehomogenní rovnice (s pravou stranou) se často hledá zkusmo. V tomto případě je však i fyzikální důvod (viz níže) pro řešení ve tvaru :

$$\boxed{y = A \cdot sin(\Omega\, t + \Phi_o)}$$

partikulární řešení

Obecné řešení nucených kmitů při malém tlumení bude mít tedy tvar :

$$\boxed{y = C \cdot e^{-b.t} \cdot sin(\omega_1\, t + \varphi_o) + A \cdot sin(\Omega\, t + \Phi_o)}$$

obecné řešení nuc. kmitů

Dvě části řešení jsou vlastně důsledkem dvou vlivů na pohyb hmotného bodu : prvním je spolupůsobení třecí a pružné síly - důsledkem jsou tlumené kmity , vyjádřené prvním členem řešení. Průběh těchto kmitů dobře známe a víme, že po nějaké době (tzv. přechodový stav) prakticky vymizí.

Pak zůstane nenulový pouze druhý člen (partikulární řešení), který je způsoben druhým vlivem - budicí silou (protože obsahuje její parametr Ω). Vidíme, že jde o harmonický kmitavý pohyb stejné frekvence jako má budicí síla (ne však stejné amplitudy a fáze).

Obecné řešení v ustáleném stavu je tedy určeno pouze partikulárním řešením diferenciální rovnice :

$$\boxed{y = A \cdot sin(\Omega\, t + \Phi_o)}$$

nucené kmity v ustáleném stavu

Veličiny A a Φ_o jsou vlastně integračními konstantami partikulárního řešení a musí být nalezeny tak, aby toto řešení vyhovělo úplné nehomogenní diferenciální rovnici – dosadíme ho tedy do této rovnice :

Potřebujeme nejprve jeho derivaci :

$$\frac{dy}{dt} = A \cdot \Omega \cdot cos(\Omega\, t + \Phi_o)$$

A ještě druhou derivaci :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -A \cdot \Omega^2 \cdot sin(\Omega\, t + \Phi_o)$$

A nyní můžeme dosadit do pohybové rovnice :

$$-A\Omega^2\, sin(\Omega t + \Phi_o) + 2bA\Omega\, cos(\Omega t + \Phi_o) + A\omega^2\, sin(\Omega t + \Phi_o) = \frac{F_o}{m} \cdot sin\, \Omega\, t$$

Rovnost levé a pravé strany rovnice znamená vlastně rovnost dvou funkcí času, která musí být splněna pro libovolnou hodnotu proměnné t . Pro naše dvě neznámé A a Φ_o potřebujeme vytvořit dvě „obyčejné“ - nečasové rovnice. Dosadíme tedy postupně dva různé konkrétní časy :

$\boxed{t = -\dfrac{\Phi_o}{\Omega}}$ ……….... potom bude $\Omega t + \Phi_o = 0$ a také $\Omega t = -\Phi_o$

$\boxed{t = -\dfrac{\Phi_o}{\Omega} + \dfrac{\pi}{2 \cdot \Omega}}$ …. potom bude $\Omega t + \Phi_o = \dfrac{\pi}{2}$ a také $\Omega t = \dfrac{\pi}{2} - \Phi_o$

A vzniknou tak dvě rovnice pro dvě neznámé :

$$-A\Omega^2 \sin(0) + 2bA\Omega \cos(0) + A\omega^2 \sin(0) = \frac{F_o}{m} \cdot \sin(-\Phi_o)$$

$$-A\Omega^2 \sin(\frac{\pi}{2}) + 2bA\Omega \cos(\frac{\pi}{2}) + A\omega^2 \sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{F_o}{m} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - \Phi_o)$$

Rovnice upravíme pomocí známých hodnot trigonometrických funkcí :

$$2bA\Omega = -\frac{F_o}{m} \cdot \sin\Phi_o$$

$$-A\Omega^2 + A\omega^2 = \frac{F_o}{m} \cdot \cos\Phi_o$$

Jestliže pak první rovnici vydělíme rovnicí druhou, vykrátí se amplituda A a dostaneme ihned vztah pro fázovou konstantu Φ_o (viz dále).

K nalezení druhé neznámé A ještě umocníme obě rovnice na druhou a sečteme :

$$(2bA\Omega)^2 + \left(-A\Omega^2 + A\omega^2\right)^2 = (-1)^2 \cdot \left(\frac{F_o}{m}\right)^2 \cdot \sin^2\Phi_o + \left(\frac{F_o}{m}\right)^2 \cdot \cos^2\Phi_o$$

Na levé i pravé straně můžeme provést vytknutí :

$$A^2 \cdot \left((2b\Omega)^2 + (-\Omega^2 + \omega^2)^2\right) = \left(\frac{F_o}{m}\right)^2 \cdot \left(\sin^2\Phi_o + \cos^2\Phi_o\right)$$

Nalevo umocníme dvojčlen a na straně pravé použijeme vztah pro součet kvadrátu sinu a kosinu :

$$A^2 \cdot \left(4b^2\Omega^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2\right) = \left(\frac{F_o}{m}\right)^2 \cdot 1$$

Rovnici nakonec odmocníme a tak pro amplitudu nucených kmitů (a pro jejich fázový posuv oproti kmitům budicí síly) dostáváme vztahy :

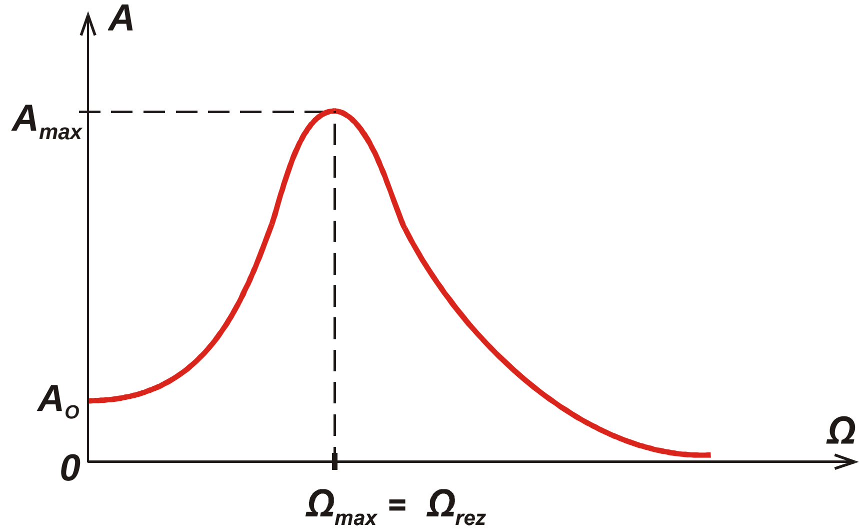
$$\boxed{A = \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}}}$$

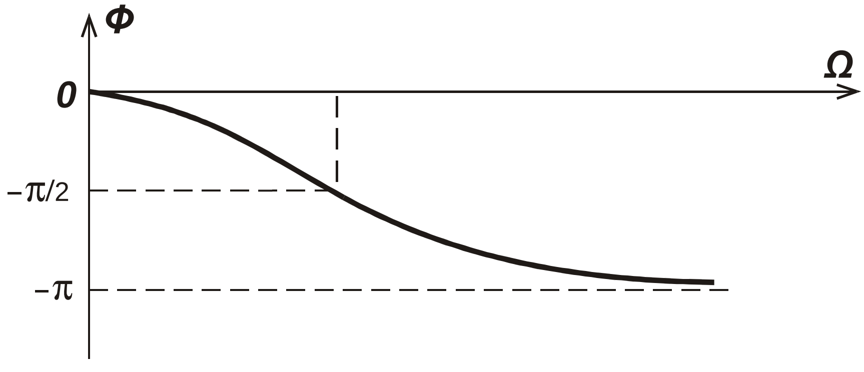
$$\boxed{tg\Phi_o = -\frac{2b\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}}$$

Povšimněte si v následujících grafech obou těchto funkcí :

$\boxed{A = A(\Omega)}$ $\boxed{\Phi = \Phi(\Omega)}$

zejména závislosti amplitudy nucených kmitů na frekvenci budicí síly - tzv. ***rezonanční křivka*** :





Rezonanční křivka začíná na nenulové počáteční hodnotě A_o , což je vlastně amplituda při nulové frekvenci Ω – jinak řečeno je to maximální výchylka A_o (hmotného bodu na pružině tuhosti k) při nekonečně pomalém nárůstu vnější budicí síly - až do jejího maxima F_o . Je jasné, že přitom musí platit pro pružinu (pro pružnou sílu) rovnice :

$$F_o = k \cdot A_o$$

Když si představíme, že bychom nataženou pružinu s hmotným bodem v této maximální výchylce uvolnili (od budicí síly, i od síly třecí) - pak by se hmotný bod zřejmě rozkmital netlumenými kmity, které by měly vlastní frekvenci ω a právě tuto amplitudu A_o (stačí uvážit zachování energie kmitů).

Počáteční amplituda rezonanční křivky se tedy také rovna ***amplitudě vlastních kmitů*** oscilátoru (tj. kmitů našeho hmotného bodu na dané pružině, bez působení tlumicí i budicí síly) :

$$\boxed{A_o(\Omega = 0) = \frac{F_o}{k}}$$

počáteční amplituda = amplituda vlastních kmitů

Stejný výraz bychom samozřejmě měli také dostat přímým dosazením nulové budicí frekvence Ω do obecného vztahu pro amplitudu nucených kmitů (zkuste sami).

Z tohoto vztahu je také ihned vidět, že pro velmi vysoké frekvence budicí síly ($\Omega \to \infty$) klesá amplituda limitně až k nule - tj. kmity zanikají (pro jakkoliv vysokou budicí sílu a při nenulovém tlumení, jde vlastně o minimum rezonanční křivky).

Název „rezonanční křivka" pak souvisí s ***jevem rezonance*** , který typicky nastává u nucených kmitů a který je charakterizován silným nárůstem amplitudy kmitů a vznikem výrazného maxima při určité hodnotě frekvence budicí síly – je to tzv. ***rezonanční frekvence*** Ω_{rez} .

Tuto velmi důležitou veličinu stanovíme dále standardním matematickým postupem pro hledání extrému funkce :

$$\boxed{\frac{dA}{d\Omega} = 0}$$

Z důvodu konstantního čitatele a monotónní funkce ve jmenovateli (odmocnina) postačí ovšem derivovat pouze výraz pod odmocninou:

$$-4\Omega(\omega^2 - \Omega^2) + 8b^2\Omega = 0$$

Vyloučíme-li $\Omega = 0$ (to jistě není hledané maximum), dostaneme :

$$-\omega^2 + \Omega^2 + 2b^2 = 0$$

Druhé, nenulové řešení je tedy :

$$\boxed{\Omega_{max} = \Omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2b^2}}$$

rezonanční frekvence

Maximální hodnotu amplitudy pak lehce získáme dosazením této frekvence do obecného vztahu pro amplitudu :

$$A = \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega_{rez}^2)^2 + 4b^2 \Omega_{rez}^2}} = \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - (\omega^2 - 2b^2))^2 + 4b^2(\omega^2 - 2b^2)}}$$

Provedeme-li matematické úkony ve výrazu pod odmocninou a použijeme-li ještě vztah pro úhlovou frekvenci tlumených kmitů :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2}$$

dostaneme nakonec velmi jednoduchý výraz :

$$\boxed{A_{max} = \frac{F_o}{2 m b \omega_1}}$$

maximum amplitudové rezonance

Při zkoumání nucených kmitů se - podobně jako u kmitů tlumených - často používá veličina kvalita oscilátoru Q, která charakterizuje úbytek energie kmitů (je definována jako 2π – násobek podílu střední hodnoty celkové energie oscilátoru v jedné periodě kmitů a ztráty této energie během jedné periody kmitů, viz minulá kapitola „Tlumené kmity“) :

$$\boxed{Q = 2\pi \cdot \frac{W_{stř}}{W_1}}$$

kvalita oscilátoru

Jev rezonance má velký význam zejména za podmínek velmi malého tlumení , kdy konstanta tlumení je značně menší než vlastní frekvence oscilátoru (takové jsou většinou elektrické rezonanční LCR obvody) :

$$\boxed{b \ll \omega}$$

velmi malé tlumení

V tomto případě je rezonanční frekvence prakticky rovná vlastní frekvenci oscilátoru :

$$\boxed{\Omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2b^2} \cong \omega}$$

A stejně tak frekvence nucených kmitů :

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2} \cong \omega}$$

Kvalita oscilátoru je pak za těchto podmínek velmi vysoká a lze pro ni odvodit jednoduchý vzorec (viz opět minulou kapitolu) :

$$\boxed{Q = \frac{\omega}{2b} \gg 1}$$

kvalita oscilátoru *(při velmi malém tlumení)*

A pro maximální amplitudu kmitů při rezonanci můžeme potom psát (a provedeme malou úpravu) :

$$A_{max} = \frac{F_o}{2mb\omega_1} \cong \frac{F_o}{2mb\omega} = \frac{F_o}{m\omega^2} \cdot \frac{\omega}{2b} = \frac{F_o}{m\omega^2} \cdot Q$$

Dosadíme-li za vlastní úhlovou frekvenci její definiční vztah :

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

vznikne na pravé straně ještě počáteční amplituda (viz výše její definiční vztah) a celkem tak obdržíme velmi jednoduchý a velmi zásadní vztah :

$$\boxed{A_{max} = A_o \cdot Q}$$

maximum amplitudové rezonance

Při rezonanční frekvenci *(která se přibližně rovná vlastní frekvenci oscilátoru)* ***dojde tedy při vnějším buzení ke Q– násobnému zesílení amplitudy vlastních kmitů oscilátoru.***

Za velmi malého tlumení (tedy pro vysoké Q) je rezonanční jev navíc velmi „ostrý“ - tj. amplitudové **maximum je velmi úzké** - jeho ***pološířka*** $\Delta\Omega$ (šířka křivky maxima v polovině jeho výšky) je nepřímo úměrná hodnotě kvality Q :

$$\boxed{\Delta\,\Omega \approx \frac{1}{Q}}$$

Potom tedy při postupně rostoucí frekvenci budicí síly (např. postupné zvyšování otáček motoru) amplituda kmitů roste nejprve jen zvolna, ale pak velmi náhle - při malé změně frekvence (v malém frekvenčním intervalu) - nastane rychlý nárůst amplitudy do jejího maxima.

Využití amplitudové rezonance : V elektrických rezonančních obvodech při vysoké kvalitě oscilátor přesně „ najde, vybere a zesílí “ kmity své rezonanční frekvence – a to z celého spektra frekvencí, které jsou na něj přivedeny, například z antény (to je vstupní obvod nějakého přijímače, změnou jeho rezonanční frekvence pak probíhá „ladění“ přijímače).

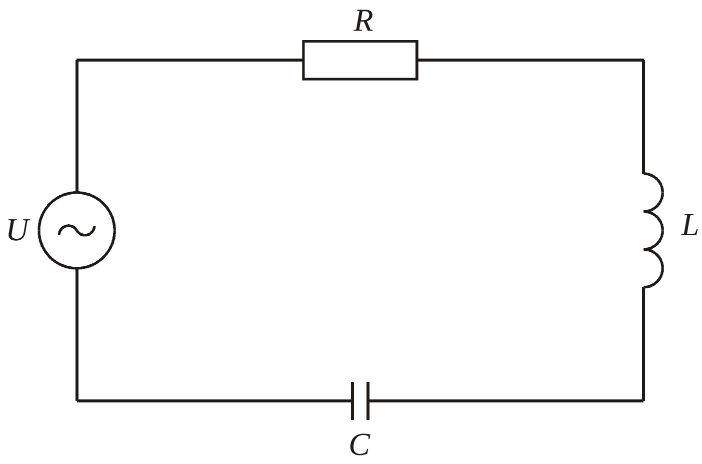
Je to také nežádoucí jev : rezonance strojních součástí (kritické otáčky hřídele), rezonance staveb (viz účinek hlasité hudby na hradby Jericha …… a proč se asi používá známý povel „zrušit krok“ pro pochodový útvar na mostě ?)

Příklad aplikace : ***oscilační sériový obvod LCR*** s vnějším budicím střídavým zdrojem (viz obr.) :

$$U = U_m \cdot sin\,\Omega.t$$

Nebo pro dosažení zcela identické výsledné rovnice lze předpokládat :

$$U = U_m \cdot sin(\Omega\, t + \frac{\pi}{2})$$



Podle 2. Kirchhofova zákona potom platí (Q je náboj na kondenzátoru) :

$$R \cdot I = U_m \cdot sin(\Omega\, t + \frac{\pi}{2}) - L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}$$

Rovnici derivujeme podle času :

$$R \cdot \frac{dI}{dt} = U_m \cdot \Omega \cdot cos(\Omega\, t + \frac{\pi}{2}) - L \cdot \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot \frac{dQ}{dt}$$

Ještě využijeme definici proudu jako náboje přeneseného (průřezem vodiče) za jednotku času a jeho souvislosti s přírůstkem náboje na kondenzátoru :

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

A po jednoduchých úpravách rovnice dostaneme :

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \cdot \dot{I} + \frac{1}{LC} \cdot I = \frac{U_m \cdot \Omega}{L} \cdot sin\,\Omega.t$$

Pro elektrický proud v obvodu tedy platí formálně shodná rovnice jako pro mechanické nucené kmity. Pro konstanty tak dostáváme :

$$\boxed{\frac{R}{L} = 2b} \qquad \boxed{\frac{1}{LC} = \omega^2} \qquad \boxed{\frac{U_m \cdot \Omega}{L} = \frac{F_o}{m}}$$

Matematický vztah pro elektrický proud v ustáleném stavu bude proto také stejný jako pro výchylku mechanických kmitů :

$$I = I_m \cdot \sin(\Omega t + \Phi_o)$$

A jeho amplitudu vypočítáme ze vztahu pro amplitudu mechanických kmitů :

$$I_m = \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}} = \frac{U_m\Omega}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \Omega^2)^2 + (\frac{R}{L})^2\Omega^2}}$$

Dostaneme tak známý vztah - ***Ohmův zákon pro střídavý obvod*** :

$$\boxed{I_m = \frac{U_m}{\sqrt{(\frac{1}{\Omega.C} - \Omega.L)^2 + R^2}}}$$

Pro fázový posuv pak bude platit :

$$tg\Phi_o = -\frac{2b\omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{\Omega.L - \frac{1}{\Omega.C}}{R}$$

Z těchto rovnic tedy vyplývají <u>všechny známé vztahy</u> pro impedance a fázové posuvy ve střídavých obvodech, včetně rezonanční frekvence a kvality oscilátoru.

(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 01/2005, rev. 04/2006, 02/2007, 04/2008**