Kmity hmotného bodu

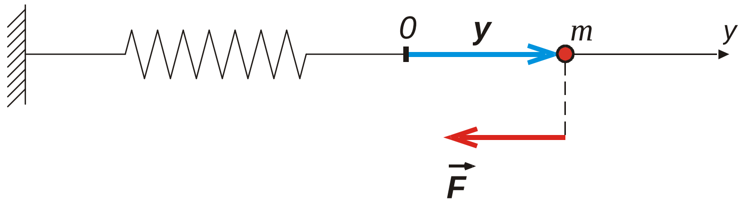
Jsou speciálním případem obecného mechanického pohybu hmotného bodu, při kterém se tento bod pohybuje v omezené oblasti kolem tzv. ***rovnovážné polohy*** . Tímto výrazem označujeme místo stabilní rovnováhy, ve kterém na hmotný bod nepůsobí žádná síla , eventuálně je nulová výslednice působících sil. Do rovnovážné polohy klademe pokud možno počátek soustavy souřadnic - potom polohový vektor hmotného bodu je současně jeho ***výchylkou*** z rovnovážné polohy.

Základním druhem kmitavého pohybu jsou tzv. ***netlumené harmonické kmity*** , které vzniknou, jestliže na hmotný bod působí síla úměrná jeho výchylce (tj. lineární závislost), ale opačně orientovaná :

$$\boxed{\vec{F} = -k \cdot \vec{r}}$$

pružná síla

Příkladem takové síly je síla pružiny (konstanta k je pak ***tuhost*** pružiny). Pro praktické aplikace je jistě velmi důležitou skutečností, že tato síla je spojena s tzv. ***pružnou deformací*** , kterou pozorujeme u pevných těles (také u kapalin a plynů) při relativně malých působících silách (matematicky ji vyjadřuje ***Hookův zákon***).



Těleso (hmotný bod) zavěšené na obyčejné pružině se ovšem většinou pohybuje pouze po přímce procházející osou pružiny. Pak je vhodné ztotožnit tuto přímku s některou ze souřadných os a dostaneme tak nejjednodušší případ ***jednorozměrných kmitů*** .

Souřadnice ve vektorové rovnici pro pružnou sílu jsou potom samozřejmě nenulové pouze na této ose, například na ose y :

$$\vec{F} = (0, F, 0) \qquad \vec{r} = (0, y, 0)$$

Dostaneme tedy skalární rovnici pro y-souřadnice (ostatní souřadnice dávají nulové rovnosti) :

$$F = -k \cdot y$$

A pohybová rovnice bude nenulová také pouze pro tuto souřadnici, tj. vzniká jediná skalární rovnice :

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = F = -k \cdot y$$

Po vydělení hmotností m a převedení na levou stranu dostaneme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$$

Podíl kladných konstant ve druhém členu se označuje jako kvadrát jiné konstanty, jejíž význam vyplyne z dalšího textu :

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$ ***úhlová frekvence***

Pak se pohybová rovnice změní na známý tvar :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y \ = \ 0}$$ ***pohybová rovnice lineárního harmonického oscilátoru***

Nebo s formálním zápisem derivací :

$$\boxed{\ddot{y} + \omega^2 y = 0}$$

Tento vztah je ***homogenní lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty*** , kterou lze řešit jak v reálném, tak i v komplexním oboru proměnné y. V každém oboru je pak možno ***obecné řešení*** této rovnice sestavit jako lineární kombinaci dvou nezávislých ***partikulárních řešení*** .

Jedním partikulárním řešením v reálném oboru je :

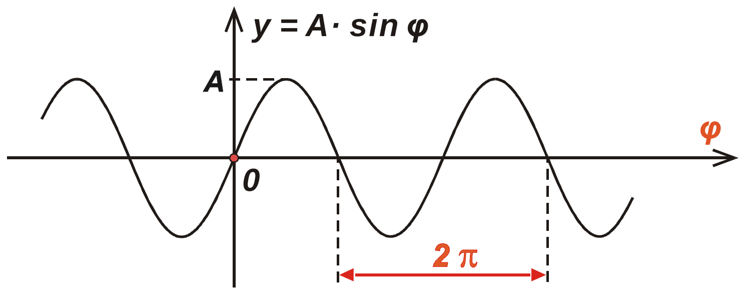
$$y = y(t) = A \cdot sin(\omega \cdot t) = A \sin \omega t$$

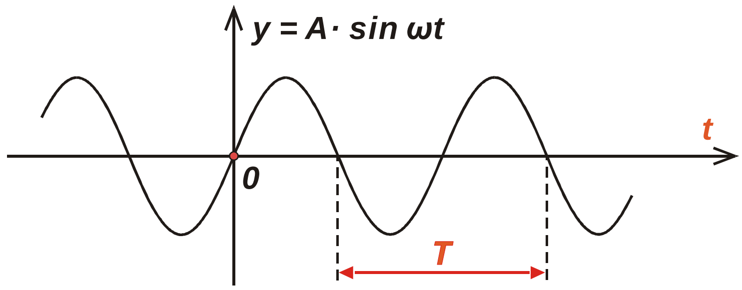
Je to funkce všeobecně známá z analytické geometrie, definovaná na celém oboru reálných čísel.

Veličina A je ***amplituda*** kmitů, výraz za znakem sin , argument funkce sinus, někdy uváděný v závorce, je ***fázový úhel*** , zjednodušeně ***fáze*** kmitů :

$$\boxed{\varphi = \omega \cdot t}$$

Jak známo, v proměnné φ je tato funkce ***periodická*** s periodou 2π. Připomeňme, že periodou funkce je takový (nejmenší) interval proměnné, po kterém se průběh funkce opakuje (viz obr.)





Je zřejmé, že jako funkce času musí být výchylka $y(t)$ také periodická. Časový interval T, po kterém se průběh výchylky opakuje, se nazývá ***periodou kmitů*** . Za tuto dobu proběhne jeden kmit, je to tedy také ***doba kmitu*** (viz obr.). Převrácenou hodnotou je potom počet kmitů za jednotku času , tj.:

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$ ***frekvence kmitů*** jednotkou je $[\frac{1}{s}] = [s^{-1}] = [Hz]$

Porovnáním odpovídajících period fáze a času vznikne vztah :

$$2\pi = \omega \cdot T$$

Můžeme tak najít smysl veličiny ω jako frekvence vyjádřené f - násobkem úhlu 2π :

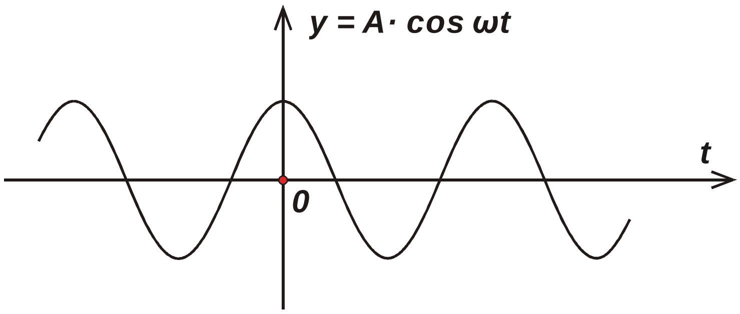
$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f}$$ ***úhlová frekvence***

Jak dále uvidíme, ve vztahu ke kruhovému pohybu by bylo možno nazývat tuto veličinu také ***úhlovou rychlostí*** , při popisu kmitů to ovšem není označení příliš vhodné.

Druhým reálným partikulárním řešením rovnice kmitů je funkce :

$$y = y(t) = A \cdot cos(\omega.t) = A \cdot cos\,\omega t$$

Středoškolské znalosti postačují ke konstatování, že jde o stejnou funkci - sinusovku, pouze posunutou na ose fáze o úhel $\pi/2$ (viz obr.). Vyjadřuje tedy stejný druh kmitání (se stejnou frekvencí, periodou a amplitudou), pouze fázově a tedy i časově posunutý.



Pro popis harmonických kmitů má tak stejné oprávnění jak funkce sinus, tak funkce kosinus. Ostatně, pomocí součtových vzorců lze druhé partikulární řešení v případě potřeby převést na tvar řešení prvního :

$$y = y(t) = A \cdot \cos \omega t = A \cdot \sin(\omega t + \pi/2)$$

Obě partikulární řešení jsou však lineárně nezávislá , proto můžeme vyjádřit ***obecné řešení*** pohybové rovnice kmitů (v reálném oboru) jako jejich lineární kombinaci (C a D jsou libovolná reálná čísla):

$$\boxed{y = y(t) = C \cdot \sin \omega t + D \cdot \cos \omega t}$$

obecné řešení rovnice kmitů

Význam této rovnice odhalíme tak, že místo konstant C a D (které jsou libovolné), zvolíme jiné (také libovolné) konstanty A a φ_o pomocí vztahů :

$$D = A \cdot \sin \varphi_o$$

$$C = A \cdot \cos \varphi_o$$

Po dosazení dostaneme :

$$y = y(t) = A \cdot \cos \varphi_o \cdot \sin \omega t + A \cdot \sin \varphi_o \cdot \cos \omega t$$

A s využitím součtových vzorců přejde tato rovnice na nejznámější tvar harmonických kmitů :

$$\boxed{y = y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_o)}$$

obecné řešení rovnice kmitů *(jiný tvar)*

Vidíme, že obecné řešení představuje opět známou sinusovku (stejné frekvence a amplitudy), ale se složitější fází :

$$\boxed{\varphi = \omega t + \varphi_o}$$

obecná fáze kmitů

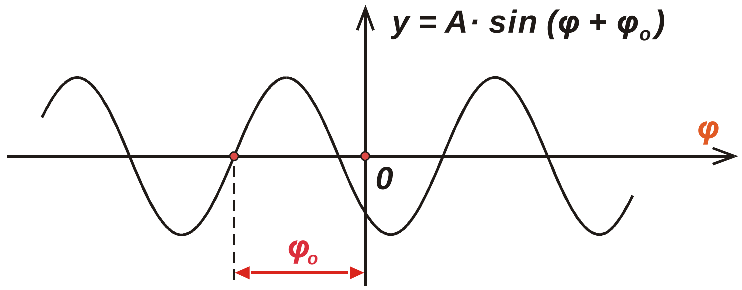
Tato obecná sinusovka již neprochází počátkem souřadnic, neboť v počátečním čase (t = 0) již velikost fáze není nulová, ale je dána ***fázovou konstantou*** ***(počáteční fází)*** φ_o . Pro (základní) nulový bod funkce musí potom platit :

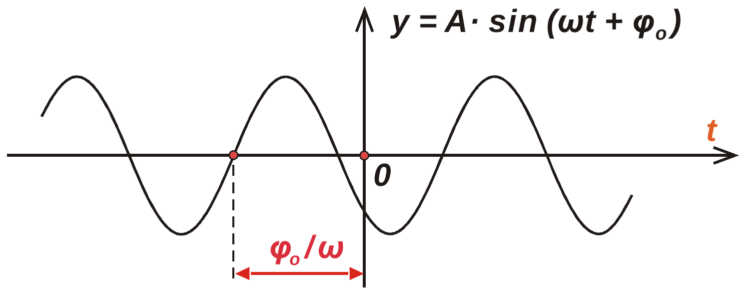
$$0 = \omega t + \varphi_o$$

A graf funkce tedy protíná časovou osu v místě :

$$t = -\frac{\varphi_o}{\omega}$$

Vhodnou volbou počáteční fáze φ_o lze proto obecnou sinusovku umístit (posunout) do libovolné polohy na ose proměnné (viz obr.) :





Víme již, že funkce cos se od funkce sin liší pouze fázovým posuvem, proto může být obecné řešení napsáno rovněž ve tvaru :

$$\boxed{y = y(t) = A \cdot cos(\omega t + \varphi_o)}$$

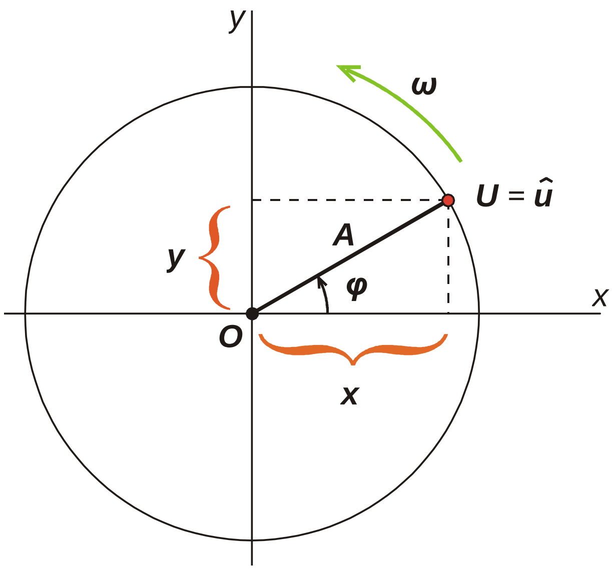
obecné řešení rovnice kmitů *(další tvar)*

Všechny tvary obecného řešení obsahují vždy ***dvě (integrační) konstanty*** A a φ_o $(C\ a\ D)$. Jejich stanovením můžeme popsat kmity libovolné amplitudy A a libovolné polohy na ose času, určené počáteční fází φ_o (a frekvence je určena hodnotami parametrů k a m).

Při řešení konkrétního případu kmitů se potom velikost integračních konstant určuje pomocí tzv. ***okrajových podmínek*** (jako jsou například počáteční podmínky - zadáme polohu a rychlost hmotného bodu v počátečním čase, většinou pro $t = 0$).

Komplexní zápis kmitů

V rovině kartézských souřadnic xy si představme rovnoměrný kruhový pohyb hmotného bodu U na poloměru A úhlovou rychlostí ω (v kladném smyslu). Počátek soustavy souřadnic nechť je ve středu kružnice, poloměr A je pak současně velikostí průvodiče hmotného bodu.



Pro úhel opsaný průvodičem za čas t platí podle kinematiky :

$$\varphi = \omega \cdot t + \varphi_o$$

Vidíme, že tento výraz je formálně shodný s obecnou fází harmonických kmitů .

Dále platí pro průmět poloměru A do osy y, tj. pro y-ovou souřadnici bodu U :

$$y = A \cdot sin\,\varphi = A \cdot sin(\,\omega.t + \varphi_o\,)$$

A pro průmět poloměru A do osy x, tj. pro x-ovou souřadnici bodu U je potom analogicky:

$$x = A \cdot cos\,\varphi = A \cdot cos(\,\omega\,t + \varphi_o\,)$$

Tento kruhový pohyb s úhlovou rychlostí ω je tedy formálně (matematicky) zcela ***jednoznačně přiřazen*** harmonickému kmitavému pohybu stejné úhlové frekvence.

Toto přiřazení bude ještě dále rozvinuto následovně :

Bod U v rovině xy můžeme považovat za komplexní číslo a napišme pak jeho matematický tvar :

$$\hat{u} = x + i \cdot y$$

Dosaďme za obě souřadnice výše uvedené průměty a použijme Eulerův vztah matematiky :

$$\hat{u} = A \cdot cos\,\varphi + i \cdot A \cdot sin\,\varphi = A \cdot (cos\,\varphi + i \cdot sin\,\varphi\,) = A \cdot e^{i \cdot \varphi} = A \cdot e^{i \cdot (\,\omega \cdot t + \varphi_o\,)}$$

Vzniklý komplexní výraz s argumentem rovným fázi kmitů je samozřejmě formálně (matematicky) také zcela ***jednoznačně přiřazen*** harmonickému kmitavému pohybu stejné fáze.

Skutečná výchylka hmotného bodu je potom v tomto komplexním výrazu obsažena jako jeho imaginární, případně reálná část.
Tento komplexní tvar harmonických kmitů se většinou upravuje následovně :

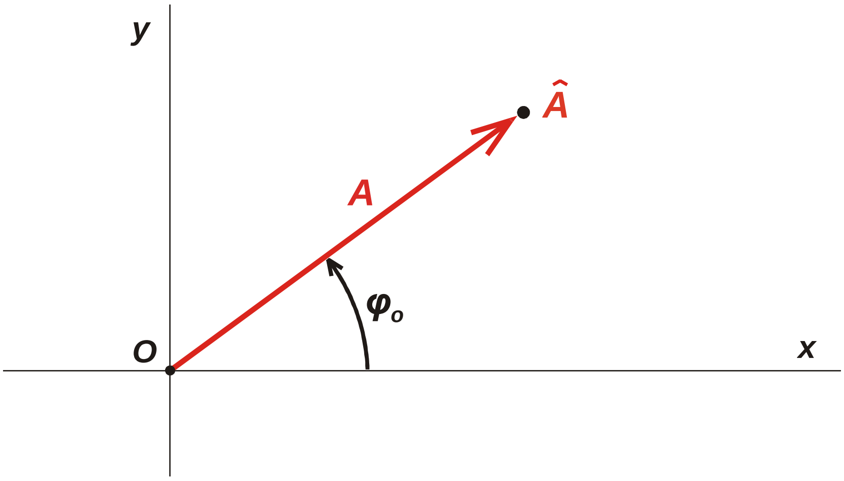
$$\hat{u} = A \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \varphi_o)} = A \cdot e^{i \cdot \varphi_o} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Přitom se definuje veličina :

$$\boxed{\hat{A} = A \cdot e^{i \cdot \varphi_o}}$$

komplexní amplituda kmitů

Komplexní amplituda zde vystupuje jako velmi významná veličina, protože obsahuje dva ze tří parametrů kmitů – amplitudu A a fázovou konstantu φ_o, které jsou zásadně důležité v různých aplikacích, kdy frekvence je zadanou veličinou (určenou hodnotami veličin k a m).



Harmonické kmity lze tedy zapsat ve tvaru :

$$\boxed{\hat{u} = \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}}$$

komplexní tvar kmitů

Výhodou tohoto zápisu kmitů je relativní jednoduchost matematických operací s komplexními výrazy. Například při skládání kmitů je nesrovnatelně jednodušší a rychlejší sečtení komplexních čísel, než použití poněkud těžkopádných goniometrických součtových vzorců pro reálné sinusovky.

Na závěr uvidíme, jak celý tento odstavec o komplexní formě kmitů, který vlastně začal poněkud divným porovnáváním dvou naprosto odlišných mechanických pohybů – kmitavého a kruhového, dostane jasný matematický podklad.

Zodpovíme totiž logickou otázku, jak dalece souvisí tento nově definovaný komplexní tvar kmitů s pohybovou rovnicí lineárního harmonického oscilátoru :

Pro rychlou odpověď stačí pouze znalost pravidel o derivacích - jak reálná , tak i imaginární část komplexního tvaru kmitů, které obě představují reálné kmity (výchylku) hmotného bodu, jsou přece řešením (partikulárním) diferenciální pohybové rovnice. Komplexní výraz je ale vytvořen jejich formálním matematickým součtem, nebo spíše lineární kombinací :

$$\widehat{u} = x + i \cdot y$$

Proto ***komplexní tvar kmitů je také řešením stejné diferenciální rovnice***, dokonce řešením obecnějším, v komplexním oboru čísel.

Toto tvrzení můžeme rovněž zdůvodnit obecnou ***teorií diferenciálních rovnic*** :

Víme, že každá lineární homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty má v komplexním oboru partikulární řešení (integrál) :

$$y = C \cdot e^{\alpha \cdot t}$$

Přitom C je libovolná komplexní (integrační) konstanta a α je kořenem tzv. charakteristické rovnice , která vznikne dosazením tohoto řešení do diferenciální rovnice.

Obecné řešení diferenciální rovnice n-tého řádu lze potom napsat jako lineární kombinaci n nezávislých partikulárních řešení :

$$y = C_1 \cdot e^{\alpha_1 . t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 . t} + C_3 \cdot e^{\alpha_3 . t} + \ldots\ldots$$

Dosaďme tedy nyní výše uvedený partikulární integrál do naší diferenciální rovnice. Po vykrácení exponencielních výrazů dostaneme :

$$\boxed{\alpha^2 + \omega^2 = 0}$$ ***charakteristická rovnice***

Tato charakteristická rovnice je kvadratická a má proto dvě řešení :

$$\alpha_{1,2} = \pm i \cdot \omega$$

Existují tedy dvě partikulární řešení a obecné řešení pohybové rovnice lineárního harmonického oscilátoru má v komplexním oboru tvar :

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{+i.\omega.t} + C_2 \cdot e^{-i.\omega.t}}$$ ***obecné řešení*** *(v komplexním oboru)*

Toto obecné řešení obsahuje dvě libovolné integrační konstanty (komplexní), jak je typické pro diferenciální rovnici druhého řádu.

Obecné řešení musí samozřejmě obsahovat všechna předchozí speciální řešení – matematicky to znamená, že obecné řešení můžeme na ně převést vhodnou volbou integračních konstant :

a) Jestliže například zvolíme :

$$C_1 = A \cdot e^{i \cdot \varphi_o}$$
$$C_2 = 0$$

Potom jejich dosazením dostaneme přímo **komplexní tvar kmitů**, včetně komplexní amplitudy :

$$y = C_1 \cdot e^{+i.\omega.t} + C_2 \cdot e^{-i.\omega.t} = A \cdot e^{i \cdot \varphi_o} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + 0 = \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Současně také vidíme, že náš <u>komplexní tvar kmitů</u> sice <u>není nejobecnějším</u> řešením pohybové rovnice, ale je řešením <u>optimálním</u> .

<u>Obecné řešení je totiž zřejmě fyzikálně nevhodné</u> – jeho dvě komplexní - tedy čtyři reálné - konstanty jsou nadbytečné, neboť popis skutečných (reálných) kmitů vyžaduje pouze dvě reálné konstanty (amplitudu A a fázovou konstantu φ_o)

b) Bez problémů je ovšem také možno pracovat i se <u>zápornou</u> exponencielou - se druhou částí obecného řešení – to znamená, že můžeme zvolit :

$$C_1 = 0$$
$$C_2 = A \cdot e^{-i \cdot \varphi_o}$$

Této možnosti využili fyzikové při zápisu pravděpodobnostní vlny (vlnové funkce) v kvantové fyzice.

c) Podívejme se ještě, že vhodnou volbou konstant lze převést obecné komplexní řešení i na <u>reálné harmonické kmity</u> - tj. na reálnou sinusovku :

Upravme nejprve obecný tvar pomocí Eulerovy matematické identity :

$$y = C_1 \cdot e^{+i.\omega.t} + C_2 \cdot e^{-i.\omega.t} = C_1 \cdot (\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t) + C_2 \cdot (\cos \omega t - i \cdot \sin \omega t)$$

A vytkněme ve výrazu goniometrické funkce :

$$\boxed{y = (C_1 + C_2) \cdot \cos \omega t + i \cdot (C_1 - C_2) \cdot \sin \omega t}$$

Laskavý čtenář celkem lehce nahlédne, že když bychom integrační konstanty zvolili ve tvaru :

$$C_1 = -C_2 = -i \cdot \frac{A}{2}$$ (kde A je libovolné reálné číslo)

Pak dostaneme naše <u>první reálné partikulární</u> řešení :

$$y = A \cdot \sin \omega t$$

A po volbě integračních konstant ve tvaru :

$$C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$$

Vznikne naše druhé reálné partikulární řešení :

$$y = A \cdot \cos \omega t$$

A pro převod na reálnou obecnou sinusovku postačí zvolit komplexní konstanty C_1 a C_2 jako :

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot (C - i \cdot D) \qquad C_2 = \frac{1}{2} \cdot (C + i \cdot D)$$ (kde C a D jsou libovolná reálná čísla)

Po dosazení do obecného řešení v rámečku pak totiž dostaneme :

$$y = C \cdot \sin \omega t + D \cdot \cos \omega t$$

Což je vlastně – jak víme z úvodních stránek této otázky – obecné řešení pohybové rovnice harmonického oscilátoru v reálném oboru – obecně posunutá sinusovka :

$$\boxed{y = C \cdot \sin \omega t + D \cdot \cos \omega t = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_o)}$$

Celkem můžeme konstatovat, že žádný matematický rozpor, či problém, nám nebrání v tom, abychom reálné, skutečné kmity – výchylky hmotného bodu - popisovali komplexními výrazy (funkcemi), které ač matematicky složitější, jsou „uživatelsky“ rozhodně příjemnější.
Jejich výhodu pak oceníme později, při skládání kmitů a vlnění .

Rychlost a zrychlení kmitavého pohybu

Již v úvodu jsme konstatovali, že kmity jsou pouze speciálním případem mechanického pohybu. Lze tedy standardním způsobem počítat základní kinematické veličiny rychlost a zrychlení podle vztahů:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

V našem jednorozměrném případě to ovšem budou skalární výrazy (y–ové souřadnice těchto vektorů). Použijme pro výpočet zjednodušený tvar kmitů bez fázové konstanty, aby bylo jasně vidět vzniklé fázové odchylky vypočítaných veličin :

$$y = y(t) = A \cdot \sin \omega t$$

Potom bude rychlost hmotného bodu:

$$v = v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(A \cdot \sin \omega t) = A\omega \cdot \cos \omega t = v_m \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Rychlost je opět harmonická funkce času stejné frekvence, ale fázově <u>posunutá</u> oproti kmitům o čtvrt periody („předbíhá“ kmity) , s <u>amplitudou</u> - tj. maximální hodnotou rychlosti :

$$v_m = A\omega$$

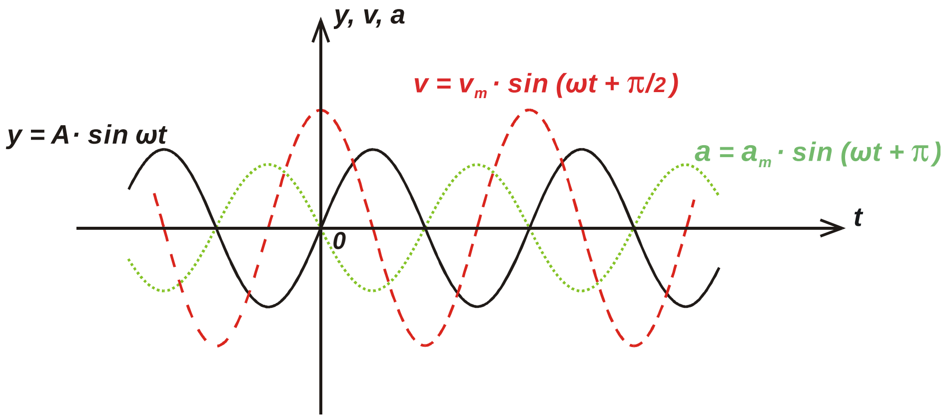
Další derivací pak získáme zrychlení hmotného bodu:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(A\omega \cdot \cos\omega t) = -A\omega^2 \sin\omega t = a_m \cdot \sin(\omega t + \pi)$$

I zrychleni je harmonická funkce času stejné frekvence, ale fázově <u>posunutá</u> oproti kmitům o půl periody („předbíhá“ kmity) a s amplitudou - tj. maximální hodnotou zrychlení :

$$a_m = A\omega^2$$

Prohlédněte si na obrázku znázorněné časové závislosti ***výchylky, rychlosti a zrychlení*** a uvědomte si jejich fázové posuny, které by ovšem bylo možno znázornit také na obrázku komplexních amplitud (jak je obvyklé v elektrotechnice, při studiu proudů a napětí ve střídavých obvodech).



<u>**Energie kmitavého pohybu**</u>

Jednoduchý je výpočet <u>***kinetické energie***</u> podle známého vzorce z mechaniky, do kterého dosadíme za rychlost výraz z předchozího odstavce:

$$\boxed{W_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m(A\omega \cdot \cos\omega t)^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t}$$

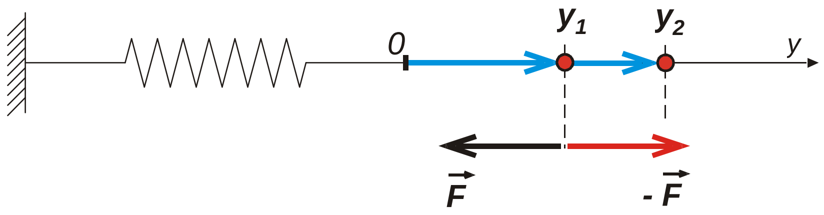
<u>***kinetická energie***</u>

<u>***Energii potenciální***</u> lze vypočítat, jen pokud je pole pružné síly <u>konzervativní</u>. Zřejmě tomu tak skutečně je, neboť k natažení (stlačení) pružiny je nutno vykonat určitou práci, kterou při uvolnění pružiny „dostaneme“ zpátky.

Pro obecný důkaz bychom ale museli zkoumat práci na libovolné dráze v prostorově rozloženém silovém poli pružné síly (takové pole by vytvořila i např. jediná pružina volně otočná kolem bodu upevnění).

V našem jednorozměrném případě pak máme jedinou možnost - počítat práci potřebnou k posunutí hmotného bodu po přímé dráze na ose y z počátečního místa y_1 do koncového místa y_2 :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{y_1}^{y_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Dosadíme tedy výrazy, vyjadřující pohyb pouze na ose y :

$$\vec{F} = (0, F, 0)$$
$$\vec{r} = (0, y, 0)$$
$$F = -k \cdot y$$

do skalárního součinu vyjadřujícího elementární práci :

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = F_y \cdot dy = F \cdot dy$$

A dostaneme:

$$A = \int_{y_1}^{y_2} -F \cdot dy = \int_{y_1}^{y_2} -(-k\,y)dy = k \cdot \int_{y_1}^{y_2} y \cdot dy = k \cdot \left[\tfrac{1}{2} y^2\right]_{y_1}^{y_2} = \tfrac{1}{2}\,k\,y_2^2 - \tfrac{1}{2}\,k\,y_1^2$$

Vykonaná práce v poli pružné síly zjevně splňuje (v rámci možností jednorozměrného případu) podmínky ***konzervativnosti*** - nezávisí na dráze , ale pouze na počátečním a koncovém bodu, a při pohybu zpět bude mít opačné znaménko, tj. „dostaneme “ ji zpátky.

Pro zjednodušení výrazu zvolíme počáteční bod v rovnovážné poloze, pak tedy v koncovém bodě y_2 bude mít hmotný bod potenciální energii vzhledem k bodu 0 (koncový bod je libovolný, napíšeme ho tedy bez indexu) :

$$\boxed{W_p(\vec{r}) = W_p(y) = \tfrac{1}{2}\,k\,y^2}$$

potenciální energie pružné síly (jednorozm.)

Pro konkrétní výpočet dosadíme za výchylku (postačí opět zjednodušený tvar bez fázové konstanty) a upravíme pomocí vztahu pro úhlovou frekvenci :

$$W_p = \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} k (A \cdot \sin \omega t)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cdot \sin^2 \omega t$$

Povšimněte si, že potenciální i kinetická energie jsou nezáporné funkce času, nejsou sice harmonické, ale jsou periodické , s poloviční periodou, tj. během jednoho kmitu dosahují dvakrát svého maxima (ne však ve stejném čase).

Nakonec vypočítáme ***celkovou mechanickou energii harmonického pohybu*** :

$$W = W_p + W_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cdot \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t$$

Můžeme vytknout a použít známého trigonometrického vzorce:

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cdot (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = konst.$$

Celková mechanická energie je tedy konstantní, jak se sluší na konzervativní silové pole. Jestliže dosadíme ze vztahů pro úhlovou frekvenci a pro amplitudu rychlosti :

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$v_m = A \omega$$

Pak dostaneme jiné vyjádření celkové energie :

$$\boxed{W = W_p + W_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_m^2}$$

celková energie

Tento vztah nám dobře ukazuje, jak se potenciální energie „přelévá“ do energie kinetické a naopak, takže v místě maximální výchylky (amplitudy) je celková energie rovna energii potenciální (a kinetická energie je tedy nulová) a v místě maximální rychlosti je pak celková energie rovna energii kinetické (a potenciální je nulová - jaké je to místo?).

(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 01/2005, doplněno 04/2006, rev. 04/2008**