Relativistická energie

V klasické mechanice jsme se podrobně seznámili s obecným pojmem (mechanická) **energie** - jako schopnosti tělesa vykonat mechanickou práci.

Tato schopnost byla jednoznačně spojena se **stavem tělesa** – buď s jeho polohou (**potenciální energie**), nebo s jeho pohybovým stavem, určeným velikostí rychlosti (**kinetická energie**).

Velikost energie pak byla stanovena jako velikost vykonané práce tělesem při jeho návratu do definovaného počátečního stavu - a byla také rovna původně vykonané práci (vnější silou) při změně stavu tělesa z počátečního na stav konečný (konečnou polohu, nebo rychlost).

Pro konzervativní silové pole jsme pak odvodili jeden z nejzákladnějších zákonů klasické fyziky (kromě Newtonových) – zákon ***zachování celkové mechanické energie*** .

Budeme jistě právem očekávat, že smysl tak zásadní fyzikální veličiny, jako je energie, se ve speciální teorii relativity nezmění.

Pokusme se proto nyní vypočítat **kinetickou energii tělesa** (hmotného bodu) hmotnosti m , jako práci (nějaké síly $\vec{F}$), která je (v dané inerciální souřadné soustavě) potřebná pro uvedení tělesa z **klidu** do **pohybu** rychlostí v .

Tato práce se samozřejmě koná na určité dráze mezi počáteční bodem $\vec{r}_1$ a koncovým bodem $\vec{r}_2$, víme však, že v případě kinetické energie velikost vykonané práce **nezávisí** ani na tvaru dráhy, ani na jejích krajních bodech , ale je **dána pouze počátečním a konečných pohybovým stavem** (počáteční rychlost je nulová , konečná rychlost má velikost v) :

$$E_{kin} = A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^v \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Dosaďme za sílu z relativistické pohybové rovnice a užijme dále definici rychlosti :

$$E_{kin} = \int_0^v \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^v \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_0^v d\vec{p} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_0^v d\vec{p} \cdot \vec{v}$$

Při předpokládané existenci kinetické energie nesmí tato práce záviset na tvaru dráhy, proto **zvolme** dráhu tak, aby umožnila co nejjednodušší výpočet (ale nebude to samozřejmě dokonalý důkaz) - takovou dráhu vytváří jistě **přímočarý** pohyb hmotného bodu, při kterém platí :

$$\boxed{d\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{v}}$$

Pak má skalární součin v integrálu jednoduchý tvar a můžeme také lehce stanovit velikost přírůstku hybnosti (diferencujeme součin $m \,.\, v$) :

$$d\vec{p} \cdot \vec{v} \;=\; dp \cdot v \;=\; d(\,mv\,) \cdot v \;=\; (\,dm \cdot v \;+\; m \cdot dv\,) \cdot v \;=\; dm \cdot v^2 + \; m \cdot v \cdot dv$$

Dostáváme tedy pro kinetickou energii :

$$E_{kin} = \int_0^v d\vec{p} \cdot \vec{v} = \int_0^v (\,dm \cdot v^2 + m \cdot v \cdot dv\,)$$

K úpravě druhého členu v integrálu použijeme vztah pro okamžitou hmotnost, který byl odvozen v předešlé kapitole „Relativistická dynamika“ :

$$m \;=\; \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Tuto rovnici umocníme a převedeme na jednoduchý zlomek :

$$m^2 \;=\; \frac{m_o^2}{1 - v^2/c^2} \;=\; \frac{m_o^2 \cdot c^2}{c^2 - \; v^2}$$

Po vynásobení jmenovatelem a převedení na levou stranu dostaneme :

$$m^2 \cdot (\,c^2 - \; v^2\,) \;=\; m_o^2 \cdot c^2$$

Vzniklou rovnici nyní diferencujeme (nebo lze udělat derivaci podle času a potom vynásobit diferenciálem času), přitom použijeme znalosti o derivaci součinu dvou funkcí, složené funkce a o derivaci konstanty (pravá strana) :

$$2m \cdot dm \cdot (\,c^2 - v^2\,) \;+\; m^2 \cdot (\,-2v \cdot dv\,) \;=\; 0$$

Běžnou úpravou rovnice dále dostáváme :

$$m \cdot v \cdot dv \;=\; dm \cdot (\,c^2 - v^2\,)$$

A výsledek můžeme dosadit do vztahu pro kinetickou energii :

$$E_{kin} \;=\; \int_0^v (\,dm \cdot v^2 + m \cdot v \cdot dv\,) \;=\; \int_0^v \{\,dm \cdot v^2 + dm \cdot (\,c^2 - v^2\,)\} \;=\; \int_0^v dm \cdot c^2$$

Po vytknutí konstantní rychlosti světla pak vznikne velmi jednoduchý výraz :

$$E_{kin} \;=\; c^2 \cdot \int_0^v dm$$

V **klasické fyzice** by takový vztah – integrál přírůstků hmotnosti tělesa na nějaké dráze - byl velmi podivný - a byl by samozřejmě nulový , neboť hmotnost tělesa je v klasické fyzice konstantní veličinou.

V **teorii relativity** už ale známe **závislost hmotnosti** tělesa na rychlosti (jako rostoucí funkci této rychlosti) - je proto zřejmé, že meze integrálu určují počáteční **klidovou hmotnost** (při nulové rychlosti) a konečnou **okamžitou hmotnost** (při rychlosti v) :

$$E_{kin} = c^2 \cdot \int_0^v dm = c^2 \cdot [\, m \,]_0^v = m(v) \cdot c^2 - m(0) \cdot c^2$$

Zapsáno zjednodušeně :

$$\boxed{E_{kin} = m \cdot c^2 - m_o \cdot c^2}$$

kinetická energie

Z předchozí kapitoly také víme, že při rychlosti tělesa blížící se rychlosti světla roste jeho okamžitá hmotnost nade **všechny meze** :

$$\boxed{m = m(v) = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \xrightarrow[v \to c]{} \infty}$$

Dosadíme-li tuto hmotnost do posledního vztahu, bude nám ihned jasné, že **stejný závěr** můžeme vyslovit i pro práci vykonanou při urychlování tělesa, tedy pro jeho kinetickou energii :

$$\boxed{E_{kin} = m(v) \cdot c^2 - m_o \cdot c^2 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot c^2 - m_o \cdot c^2 \xrightarrow[v \to c]{} \infty}$$

Obě tyto nekonečné limity vyjadřují zjevně nereálnou situaci, můžeme je proto považovat za rozumné *fyzikální zdůvodnění mezní rychlosti těles* (rovné rychlosti světla) ve speciální teorii relativity.

Dále promyslíme význam pravé strany získané rovnice pro kinetickou energii :

Jelikož to je vztah pro kinetickou energii - proto každý z obou členů na pravé straně musí mít také fyzikální rozměr a hlavně **fyzikální smysl nějaké energie**.

Konkrétně druhý člen na pravé straně obsahuje kromě konstanty pouze klidovou hmotnost, je tedy jednoznačně **spojený s klidovým stavem** tělesa v dané inerciální soustavě a vyjadřuje proto **veškerou** energii tělesa (hmotného bodu) v tomto stavu :

$$\boxed{E_o = m_o \cdot c^2}$$

klidová energie tělesa

Tato energie je jistě tvořena **potenciální energií** tělesa v případném vnějším silovém poli a musí obsahovat také veškerou **vnitřní energii** která je „skrytá“ v tělese, jako je i jenom „obyčejná“ mechanická energie všech částic tělesa (viz v termodynamice ***vnitřní energie*** plynu) - ale celou hodnotu klidové energie představuje až ta energie, která by se uvolnila až při dokonalé přeměně hmoty na energii – při tzv. **anihilaci** hmoty – podle ***zákona zachování hmoty a energie*** (viz dále).

Pozn. : Na částice v tělese také ovšem působí různé síly „nemechanické“ podstaty – jde zejména o síly, které těleso „drží pohromadě“ – tj. jsou to síly vytvářející **vázané stavy** částic tělesa. Potenciální energie těchto sil (v absolutní hodnotě) se označují jako **vazební energie** :

Existují tedy vazební energie všech částic ve **struktuře celého tělesa** (vazební ***energie krystalické mřížky***) a energie všech „subčástic“ ve **struktuře každé částice** hmoty - tj. vazební energie **atomů** v molekule (***chemická energie***), vazební energie **elektronů** v atomu (celková ***ionizační energie*** atomu) a vazební energie **nukleonů** v atomovém jádru (***jaderná energie***).

Nejvyšší hodnotou se vyznačuje posledně jmenovaná jaderná vazební energie – je v rozmezí 1,1 až 8,6 MeV na jeden nukleon jádra – přesto však ve srovnání s klidovou energií nukleonu (931 MeV) je zanedbatelně malá (přibližně od 1 ‰ do 1 %).

Význam prvního členu pravé strany poznáme až po jeho osamostatnění :

$$m(v)\cdot c^2 = m\cdot c^2 = E_{kin} + m_o\cdot c^2 = E_{kin} + E_o$$

Je to tedy celkový součet kinetické energie a klidové energie tělesa, a protože už vlastně **jiný druh** energie (než tyto dvě energie - tělesa v klidu a tělesa v pohybu) **neexistuje** , musí tento součet vyjadřovat **veškerou možnou energii tělesa** :

$$\boxed{E = E_{kin} + E_o = m\cdot c^2}$$ ***celková energie tělesa***

Vztah pro kinetickou energii pak bude mít jednoduchý tvar :

$$\boxed{E_{kin} = E - E_o}$$ ***kinetická energie*** (vyjádřená pomocí celkové a klidové energie)

Jestliže ještě vypustíme prostřední část rovnice pro celkovou energii , dostaneme pak nejznámější vztah teorie relativity a možná celé moderní fyziky :

$$\boxed{E = m\cdot c^2}$$ ***Einsteinův vztah*** *pro celkovou energii*

Tento vztah **přímé úměry hmoty (hmotnosti) a energie** s ní spojené - těchto dvou základních projevů objektivní reality našeho světa - může být chápán jako vyjádření :

„ekvivalence“ hmoty a energie

Pozn.: V kvantové fyzice, kde i energie elektromagnetického pole je spojena s částicemi (fotony) – tj. s objekty, které si obvykle představujeme pod pojmem „hmota“ - je pak vhodnější Einsteinův vztah interpretovat jako ekvivalenci hmotnosti a energie.

Speciální teorie relativity nás tak přivádí nejen k **jinému chápání prostoru a času** – základních parametrů vývoje světa (nejsou to již absolutní, nezávislé pojmy, ale jsou nyní vzájemně propojené do výsledného časoprostoru a navíc neoddělitelně spjaté s pohybující se hmotou) - ale tato teorie mění i náš pohled na veškerou **podstatu světa** kolem nás – tím, že vzájemně **spojuje jeho formy** projevu - **hmotu** a **energii** .

Vědecký pohled na svět kolem nás – jako na ***hmotu a energii vyvíjející se v prostoru a čase*** – je tedy dnes úplně jiný než před rokem 1905 …..

Ve fyzice již nemůže platit **zákon zachování hmoty** a odděleně vedle něj **zákon zachování energie** , ale je nutno používat obecný ***zákon zachování hmoty a energie*** .

Ekvivalence hmoty a energie není rozhodně pouze teoretický vztah, ale v současnosti je již mnohonásobně experimentálně potvrzena, zejména v procesech mikrosvěta.

Jako první byl zde objeven ***hmotnostní úbytek jader*** :

Již ze střední školy víte, že podle současného standardního modelu je **jádro atomu** tvořeno ***nukleony*** dvojího druhu - kladnými ***protony*** a neutrálními ***neutrony*** a může být formálně označeno :

$\boxed{{}^{A}_{Z}X}$ nepříklad pro uhlík : $\boxed{{}^{12}_{6}C}$

Nukleonové číslo A udává celkový počet nukleonů a ***protonové číslo*** Z je pak počet protonů v jádře (stejně je také elektronů v elektronovém obalu neutrálního atomu). Počet neutronů v jádře můžeme tedy vyjádřit rozdílem $A - Z$.

Jestliže pak porovnáme celkovou (klidovou) hmotnost jádra m_j s hmotnostmi jednotlivých nukleonů, tj. s (klidovou) hmotností protonů m_p a s (klidovou) hmotností neutronů m_n (jako samostatných, volných částic), zjistíme z pohledu klasické fyziky neuvěřitelnou věc, že **součet hmotností všech nukleonů** daného jádra je **větší než hmotnost jádra** , z nich vytvořeného.

Můžeme si představit, že při „sestavení“ jádra z jeho stavebních prvků – nukleonů - nastane úbytek hmotnosti :

$$\boxed{\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_j \neq 0}$$ ***hmotnostní úbytek jádra***

Na rozdíl od počátečního souboru volných samostatných nukleonů je ale výsledné jádro atomu velmi stabilní kompaktní útvar, který „drží pohromadě" obrovskými přitažlivými silami působícími mezi nukleony (***jaderné síly*** , tzv. ***silná interakce***).

Práce těchto sil při vzniku jádra (při vzájemném přiblížení nukleonů) vytváří pak ***vazební energii*** jádra E - a tato energie dokonale splňuje Einsteinův vztah :

$$\boxed{E = \Delta m \cdot c^2}$$

vazební energie jádra

Pokles hmotnosti je tedy podle Einsteinova vztahu přesně „vykompenzován" vzniklou „ekvivalentní" vazební energií jádra.

Ačkoliv je hmotnostní úbytek jádra **velni malý** – asi 1% hmotnosti jádra - podle Einsteinova vztahu, obsahujícímu kvadrát rychlosti světla, tomu ale odpovídá **obrovské množství energie** - řádově megaelektronvolty (MeV) - tj. milionkrát více než vazební energie elektronů v atomu.

A jen menší část této vazební energie (například 10 %) můžeme získat k našemu prospěchu (či zkáze) pomocí vhodných ***jaderných reakcí*** - nejznámější jsou řetězová ***štěpná reakce*** a ***termonukleární syntéza*** jader.

Úspěšné světové demonstrace jejich účinků dávají tušit nesmírnou hodnotu energie která by vznikla při 100 % - ní přeměně hmoty na ekvivalentní energii – při tzv. ***anihilaci hmoty*** – prokázané na částicích mikrosvěta například reakcí elektronu a pozitronu, ve větším měřítku pak díkybohu zatím používané pouze autory sci-fi příběhů.

Vytvořme ještě na závěr velmi užitečný vztah mezi celkovou energií tělesa a jeho hybností. Použijeme v minulé kapitole odvozený vztah pro okamžitou hmotnost :

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

který dosadíme do Einsteinova vztahu :

$$E = m \cdot c^2 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot c^2$$

Po umocnění a vydělení rovnice kvadrátem rychlosti světla dostaneme :

$$\frac{E^2}{c^2} = \frac{m_o^2 \cdot c^2}{1 - v^2/c^2}$$

Další úpravou bude, že v čitateli zlomku přičteme a odečteme výraz $m_o^2 \cdot v^2$ (tím se čitatel nezmění) . Po formálním přeskupení členů pak dostaneme :

$$\frac{E^2}{c^2} = \frac{m_o^2 \cdot c^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_o^2 \cdot c^2 + m_o^2 \cdot v^2 - m_o^2 \cdot v^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_o^2 \cdot v^2}{1 - v^2/c^2} + \frac{m_o^2 \cdot c^2 - m_o^2 \cdot v^2}{1 - v^2/c^2}$$

První člen je ovšem kvadrát hybnosti, kterou jsme definovali v relativistické dynamice jako :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = \frac{m_o \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

a druhý člen upravíme vytknutím a následným vykrácením :

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + \frac{m_o^2 \cdot c^2 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} = p^2 + m_o^2 \cdot c^2$$

Po vynásobení kvadrátem rychlost světla tak dostaneme :

$$\boxed{E^2 = p^2 \cdot c^2 + m_o^2 \cdot c^4}$$

vztah celkové energie a hybnosti

Tento vztah lze například výhodně použít v kvantové fyzice pro stanovení energie fotonu , který má **nulovou klidovou hmotnost** (jako „představitel“ elektromagnetického vlnění **neexistuje v klidu**) , tedy má i nulovou klidovou energii. Pak bude tedy velmi jednoduše :

$$\boxed{E = p \cdot c}$$

celková energie fotonu

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 04/2005**

rev. 04/2007