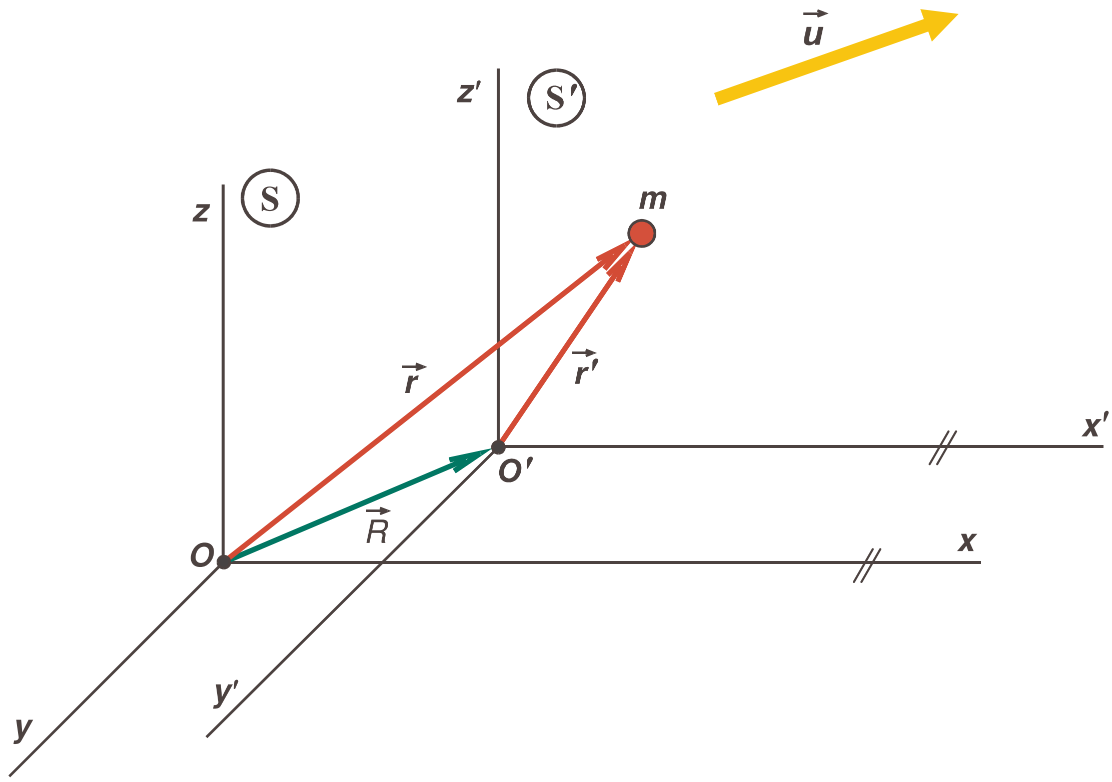
Základní postuláty a Lorentzovy transformace

Do základů své ***speciální teorie relativity*** (1905) položil Albert Einstein **pouze dva** jednoduché principy (postuláty) :

1) **Všechny fyzikální zákony mají ve všech inerciálních soustavách stejný tvar** (musí být invariantní)

2) **Rychlost světla ve vakuu je ve všech inerciálních soustavách konstantní** (bez ohledu na rychlost zdroje a pozorovatele)

Je zřejmé, že v klasické fyzice základní „elektromagnetické" zákony - **Maxwellovy rovnice** - při přechodu z jedné **inerciální** soustavy do druhé **změní svůj tvar** (vždyť jen například ze stacionárních nábojů v jedné souřadné soustavě se v druhé soustavě stanou proudy).
Matematicky pak takový přechod mezi dvěma inerciálními soustavami popisují **Galileovy transformace**.
Je proto jasné, že **porušení prvního Einsteinova principu** způsobují právě tyto transformační vztahy.



Připomeňme si jejich tvar. V klasické mechanice jsme je odvodili za předpokladu, že se jedna inerciální soustava S' pohybuje vůči druhé inerciální soustavě S posuvným (translačním) pohybem konstantní unášivou rychlostí $\vec{u}$ (a že v počátečním nulovém čase obě soustavy splývají) :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - u_x \cdot t \\ y' &= y - u_y \cdot t \\ z' &= z - u_z \cdot t \\ t' &= t \end{aligned}}$$

Galileovy transformace

Jednoduchou derivací průvodičů jsme také nalezli vztah mezi rychlostmi v obou inerciálních soustavách :

$$\boxed{\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}}$$

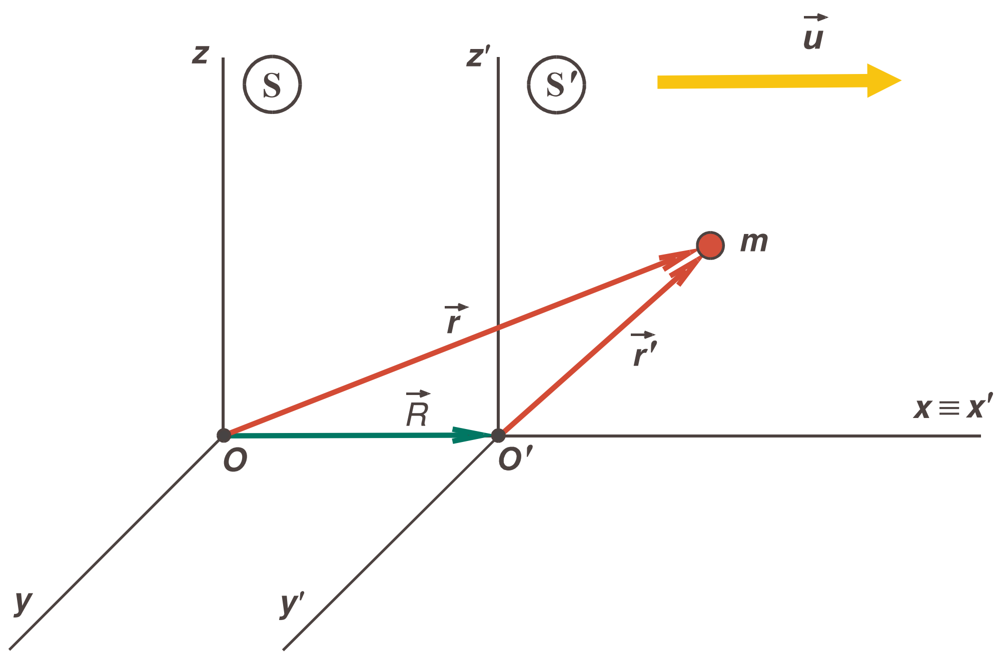
skládání rychlostí (v klasické mechanice)

Je zřejmé, že při platnosti této rovnice je **porušen i druhý Einsteinův princip** . Kdyby se totiž pohyboval světelný paprsek v soustavě S podél osy x rychlostí c , pak by v soustavě S' byla jeho rychlost jiná než rychlost světla :

$$c' = c - u \neq c$$

Tedy : **Pro splnění postulátů speciální teorie relativity budou muset přechod mezi inerciálními soustavami popisovat jiné transformační vztahy.**

Pokusíme se je nyní odvodit přímým použitím obou Einsteinových postulátů pro nejjednodušší situaci dvou inerciálních soustav - kdy unášivá rychlost je rovnoběžná se společnými x-ovými osami a zbývající osy jsou rovnoběžné (viz obr.) :



Potom budou mít klasické Galileovy transformace tvar :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - u \cdot t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}}$$

Galileovy transformace (zjednodušené)

Tyto rovnice vlastně představují matematicky nejjednodušší **vztah linearity** mezi proměnnými veličinami prostorových souřadnic a času, který zaručuje **jednoznačné přiřazení** míst a časů - tzv. ***událostí*** - v obou soustavách.

Předpokládejme, že nový vztah pro x-ové souřadnice také bude vyjadřovat lineární vztah mezi nimi, ale s jiným koeficientem :

$$\boxed{x' = k \cdot (x - u \cdot t)}$$

Transformační vztah je také **fyzikálním zákonem** , proto **podle prvního Einsteinova principu** musí mít obrácený transformační vztah (pro druhou soustavu) **stejný tvar** se stejným koeficientem (pouze s opačným znaménkem unášivé rychlosti, neboť tato rychlost je z hlediska druhé soustavy, tj. S vůči S' – také opačná) :

$$\boxed{x = k \cdot (x' + u \cdot t')}$$

Pro změnu rovností u souřadnic ostatních dvou os , kolmých na směr unášivé rychlosti, nebyl nalezen žádný fyzikální důvod, proto bude stále platit :

$$y' = y$$
$$z' = z$$

Časové souřadnice však rozhodně stejné nebudou . Jestliže totiž dosadíme za čárkované x z první rovnice, dostaneme :

$$x = k(k(x - u \cdot t) + u \cdot t') = k^2(x - u \cdot t) + k \cdot u \cdot t' = k^2 x - k^2 u \cdot t + k \cdot u \cdot t'$$

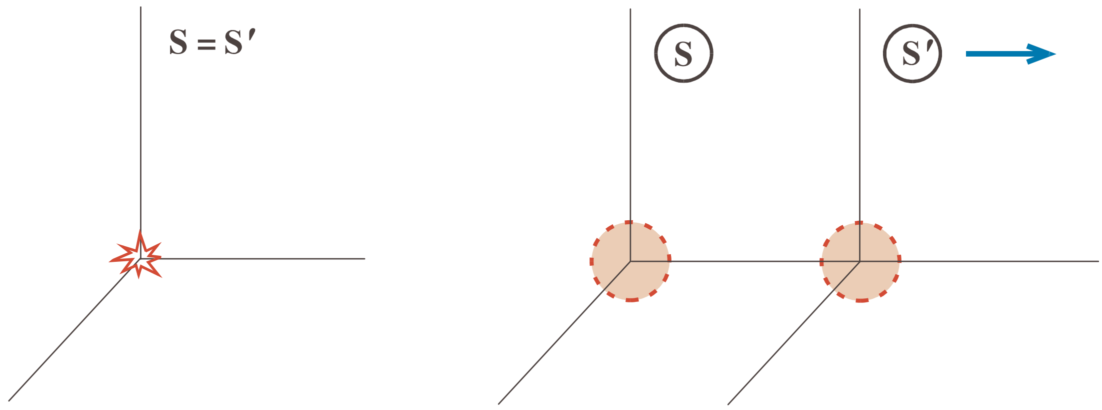
Vzniklá rovnice umožňuje vytvořit zjevně netriviální převodní vztah mezi časy v obou soustavách :

$$\boxed{t' = k \cdot t + \left(\frac{1 - k^2}{k \cdot u}\right) \cdot x}$$

V následujícím kroku použijeme **druhý Einsteinův postulát** o neměnné rychlosti světla. Využijeme také již dříve uvedený předpoklad, že obě soustavy jsou totožné na počátku odečtů obou časů , tj. pro :

$t = t' = 0$

Nechť v tomto čase nula v místě jejich společných počátků zableskne výbojka a v obou soustavách je pak **měřena rychlost světla** , které se podle druhého principu musí šířit vždy stejnou rychlostí - a stejnou ve všech směrech - proto v každé soustavě bude pozorována stejná “**světelná koule**” - tj. kulová vlnoplocha elektromagnetického vlnění (viz. obr.).



Když tedy bude v soustavě S změřen v nějakém čase **poloměr** této kulové vlnoplochy - což je vlastně **dráha světla** za tento čas na libovolném paprsku, vycházejícím z počátku, například i na ose x – pak musí platit :

$$\boxed{x = c \cdot t}$$

Protože v soustavě S' je rychlost světla stejná , musí pro čárkované souřadnice platit analogicky :

$$\boxed{x' = c \cdot t'}$$

Do této rovnice dosadíme z předchozích vztahů :

$$k(x - u \cdot t) = c \cdot \left(k \cdot t + \left(\frac{1-k^2}{k \cdot u}\right) \cdot x\right)$$

Upravíme pro výpočet x-ové souřadnice :

$$x \cdot \left(k - \frac{1-k^2}{k \cdot u} \cdot c\right) = c \cdot k \cdot t + u \cdot k \cdot t$$

A dostaneme :

$$\boxed{x = \frac{c\cdot k\cdot t + u\cdot k\cdot t}{\left(k - \frac{1-k^2}{k\cdot u}\cdot c \right)} = c\cdot t\cdot \frac{k + \frac{u\cdot k}{c}}{\left(k - \frac{1-k^2}{k\cdot u}\cdot c \right)}}$$

Porovnání získané rovnice se vztahem pro poloměr světelné koule v soustavě S nám dá podmínku pro velikost zlomku :

$$\frac{k+\frac{u\cdot k}{c}}{\left(k-\frac{1-k^2}{k\cdot u}\cdot c \right)} = 1$$

Z ní pak postupně dostáváme :

$$k + \frac{u\cdot k}{c} = k - \frac{1-k^2}{k\cdot u}\cdot c \qquad /-k$$

$$\frac{u\cdot k}{c} = -\frac{1-k^2}{k\cdot u}\cdot c \qquad /\cdot kuc$$

$$k^2u^2 = -(1-k^2)\cdot c^2 = k^2\cdot c^2 - c^2$$

A vypočítáme neznámý koeficient :

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2-u^2} = \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

Po odmocnění :

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1-u^2/c^2}}}$$

Po dosazení tohoto výsledku do předchozích rovnic pro x' a t' dostaneme transformační vztahy mezi inerciálními soustavami ve speciální teorii relativity :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - u\cdot t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - u\cdot x/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned}}$$

Lorentzovy transformace

Jak jsme již uvážili, transformační vztahy pro obrácený převod souřadnic musí být formálně úplně stejné, liší se pouze znaménkem unášivé rychlosti :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{x' + u\cdot t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + u\cdot x'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned}}$$

Lorentzovy transformace inverzní

Tyto transformační vztahy byly prvně objeveny Kramerem (v poněkud odlišném tvaru) v 80. letech 19. století při rozboru vlnové rovnice, pak je odvodil Holland (1900), když zkoumal podmínky invariance Maxwellových rovnic v inerciálních systémech a intenzivně je používal Lorentz při rozvíjení své elektronové teorie elektromagnetických jevů v pohybujících se tělesech (1904) a také Poincare (1906).

Lorentz (Hendrik Antoon) však z těchto transformačních vztahů nevyvodil žádné zásadní závěry, snažil se je vysvětlit **v rámci klasické fyziky** . Za jedinou správnou inerciální soustavu , s jedině správnými souřadnicemi, považoval stále klidový **absolutní prostor** , ve kterém platí základní tvar Maxwellových rovnic. V ostatních inerciálních soustavách, které se pohybují vůči absolutnímu prostoru, jsou pak **souřadnice nesprávné** , zkreslené zkracováním měřítek a zpomalováním hodin (které matematicky plynou z transformačních vztahů).

Zásadní krok vpřed udělal až **Albert Einstein** , když zavrhnul výlučnost absolutního prostoru a času a pokládal všechny **inerciální soustavy za rovnocenné** pro (nejen) elektromagnetické zákony a **souřadnice** v těchto soustavách považoval za objektivní a **správné** .
Vzájemná souvislost prostorových a časových souřadnic a jejich závislost na pohybovém stavu souřadného systému - pak pro Einsteina znamenala **zcela nové pojetí prostoru a času** , které samozřejmě ovlivnilo zásadním způsobem fyzikální obraz celého našeho světa.

Dříve než se budeme obdivovat úžasným relativistickým efektům, seznámíme se s základními používanými **pojmy** teorie relativity a všimneme si několika přímých **důsledků** Lorentzových transformací :
Soustava souřadnic je samozřejmě především matematický pojem , který jsme poznali nejprve v analytické geometrii jako (takřka) nehmotný systém narýsovaných přímek a měřítek.
Všechny fyzikální veličiny počínaje délkou, časem, atd. jsou však veličinami **měřitelnými** , tj. musíme o nich vždy uvažovat v souvislosti s **realizací jejich změření** .

Fyzikální soustava souřadnic je tedy zřejmě nějaká mechanická soustava **měřicích tyčí** jistě nezanedbatelné hmotnosti , protože bude asi obsahovat mnoho dalších konstrukčních prvků jako různé vzpěry a příčky, které musí zajistit, aby se měřicí tyče neprohýbaly a aby svíraly předepsané úhly.
Dále musí souřadnicová soustava obsahovat přesné ***hodiny*** pro měření času, jak dále uvidíme, ne pouze jedny. Nesmíme zapomenout na zajištění pracovních a životních podmínek pro přítomnost nějakého aktivního činitele (optimálně asi člověka), který provádí vlastní měření – tzv. ***pozorovatel*** .
Fyzikálně tedy musíme soustavu souřadnic chápat jako (dosti) **hmotné těleso** , většinou tvořící nedílný celek s nějakým jiným tělesem, které chceme sledovat (představte si její realizaci na Zemi, ve vlaku, v letadle, na oblíbené raketě …).

V souřadné soustavě (nepřiklad S) změřené **prostorové souřadnice** x, y, z a **čas** t pak vypovídají o tom, že na určitém místě a v určitém čase se něco stalo - je to tzv. ***událost*** v soustavě S **.** Všechny čtyři souřadnice jsou principiálně stejně důležité, proto se většinou formálně matematicky spojují do čtyřrozměrného ***časoprostoru*** (x, y, z, t).

Uvažme ještě jednu okolnost při stanovení (změření) nějaké události v soustavě S : Jak prostorové souřadnice, tak i čas musejí být opravdu změřeny v této soustavě , tj. pozorovatel musí odečíst souřadnice na jejích měřicích tyčích a také čas na hodinách soustavy.
Co to je ale za hodiny ? Můžeme si například představit, že si pozorovatel přinese s sebou na místo sledované události svoje hodinky a tam na nich odečte čas, jak vlastně všichni běžně v životě děláme ?

V teorii relativity to ale nelze udělat !
Podle poslední rovnice Lorentzových transformací totiž časový údaj závisí na unášivé rychlosti soustavy. Kdyby tedy pozorovatel **přenášel** své hodiny nenulovou rychlostí po soustavě S , už by to **nebyly** hodiny této soustavy - patřily by do soustavy jiné.
Vlastní hodiny každé souřadné soustavy (tedy i každého tělesa), které mají měřit její ***vlastní čas*** , musí být proto **stále v klidu** vůči této soustavě - musí být **stále na stejném místě** této soustavy.

V teorii relativity často sledujeme několik událostí v různých místech zvolené soustavy a přitom určujeme jejich časy – tedy podle předchozích úvah v místě každé události potřebujeme mít předem připravené vlastní hodiny.
V každé soustavě souřadnic musí tedy existovat ne jedny hodiny, ale celý **soubor vlastních hodin** , **vhodně rozmístěných** v místech očekávaných událostí, **stejně rychle jdoucích** a samozřejmě vzájemně ***synchronizovaných*** .

Příprava takového souboru se předpokládá dvěma možnými způsoby :

a) Všechny vhodné hodiny (jdoucí stejně rychle) můžeme shromáždit na jednom místě soustavy, synchronizovat je (seřídit na stejný údaj) a nekonečně pomalu je posunout na potřebná místa. To je jistě teoreticky vynikající, ale pro skutečnou realizaci bychom určitě použili druhý způsob :

b) Nebo vhodné hodiny napřed rozmístíme na potřebná místa a potom je synchronizujeme s nějakými klidovými hodinami soustavy (aspoň jedny jistě v soustavě musejí být) - s využitím konstantní rychlosti světla (tj. elektromagnetického signálu) a změřené délky jeho dráhy.

Všimněme si dále, že z Lorentzových transformací přímo plyne (aby měl zlomek smysl) zásadní podmínka pro unášivou rychlost souřadné soustavy:

$$\boxed{u \leq c}$$

Každá soustava je ale hmotné těleso a naopak každé těleso může být souřadnou soustavou, proto tuto nerovnost považujeme za základní podmínku na rychlost tělesa ve speciální teorii relativity :

rychlost světla ve vakuu je mezní rychlostí pohybu hmotných těles

Ze tvaru Lorentzových transformací je také ihned vidět jejich vynikající vlastnost - že pro **nízké rychlosti** (ve srovnání s rychlostí světla) přecházejí na klasické Galileovy transformace :

$$x' = \frac{x - u \cdot t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \xrightarrow[u \ll c]{} x - u \cdot t$$

$$t' = \frac{t - u \cdot x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \xrightarrow[u \ll c]{} t$$

Pro takové nízké rychlosti tedy v běžném životě a v běžných technických aplikacích můžeme dále používat klasickou Newtonovu mechaniku, jejíhož příjemného souladu s našimi intuitivními představami o okolním světě si pak už jistě budeme velmi vážit.

----

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 03/2006**

rev. 03/2007