Dynamika pevného tělesa

Dále se budeme podrobněji věnovat ***tuhé soustavě*** hmotných bodů jako **modelu pevného tělesa**. Tento speciální případ soustavy hmotných bodů lze jednoduše charakterizovat neměnnými vzdálenostmi mezi jednotlivými body, které jsou důsledkem jejich konstantních průvodičů. Těžiště tuhé soustavy má tedy také neměnnou, konstantní polohu :

$$\boxed{\vec{r}_o = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \vec{r}_k = konst.}$$

těžiště tuhého tělesa

Pro pohyb pevného tělesa samozřejmě platí všechny rovnice , odvozené v předchozích kapitolách pro obecnou soustavu hmotných bodů :

- Při studiu chování tělesa za různých podmínek lze výhodně využít **rozkladu obecného pohybu** tělesa na **posuvný pohyb** daný pohybem těžiště a na **rotační pohyb** kolem osy jdoucí těžištěm.
- Rovněž jsou platné z obecného pohybu odvozené **podmínky klidové rovnováhy** tělesa, kdy nedochází ani k translačnímu, ani k rotačnímu pohybu tělesa.
- Stejně tak můžeme využívat vztahy odvozené pro **izolovanou (uzavřenou) soustavu** , na kterou nepůsobí žádné vnější síly.
- A samozřejmě používáme také **ekvivalentní soustavy sil** , které mají stejnou výslednici i stejný výsledný silový moment jako původní vnější síly.

Dále si ukážeme, jak neměnný tvar těles umožní zavedení nové fyzikální veličiny - **momentu setrvačnosti tělesa** - a jak tato veličina výrazně zjednoduší druhou impulzovou větu.

Nejprve se budeme zabývat **kinetickou energii** tělesa s využitím právě znalostí o rozkladu obecného pohybu na pohyb translační a pohyb rotační .

Nejjednodušší jistě bude výpočet v případě translace tělesa :

1) ***Kinetická energie při posuvném pohybu tělesa*** , kdy se všechny jeho body pohybují stejnou rychlostí jako těžiště, tj. platí :

$$\boxed{\vec{v}_k = \vec{v}_o = \vec{v}}$$

Kinetickou energii tělesa potom vypočítáme, s využitím tohoto vztahu, jako **součet** kinetických energií všech hmotných bodů (dále bude vytknut kvadrát rychlosti) :

$$W_{kin} = \sum_{k=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_k \cdot v_k^2 = \sum_{k=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_k \cdot v^2 = \tfrac{1}{2} v^2 \cdot \sum_{k=1}^{N} m_k$$

Jestliže použijeme vztah pro celkovou hmotnost tělesa, dostaneme nakonec :

$$\boxed{W_{kin} = \tfrac{1}{2} m v^2}$$

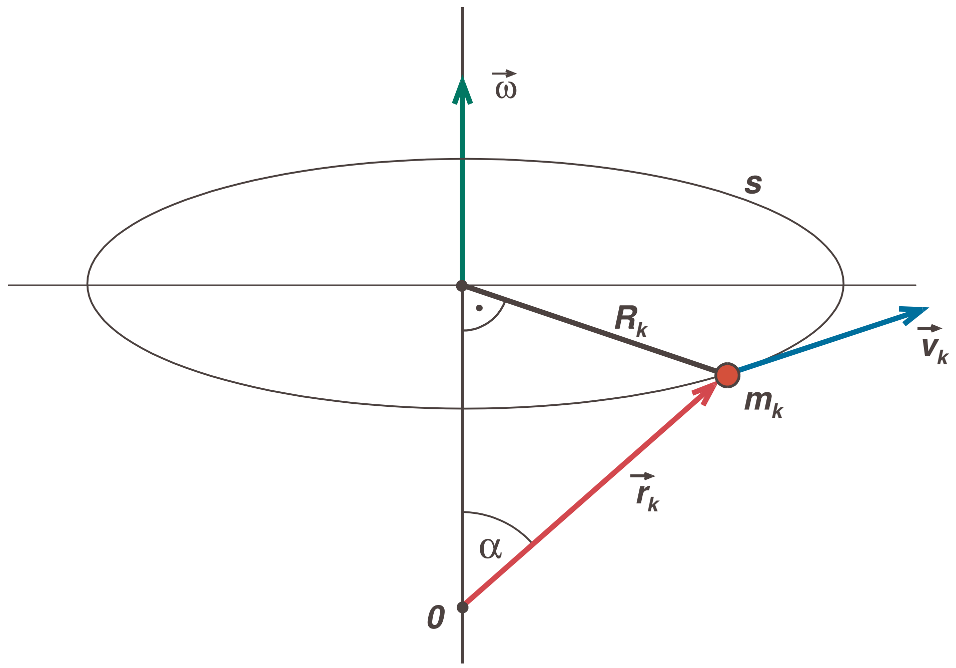
kinetická energie tělesa při translaci

Z tohoto vztahu je zřejmé, že kinetická energie tělesa při translaci je rovna **kinetické energii těžiště** .

Poněkud složitější než u translace jsou vždy výpočty spojené s rotací :

2) ***Kinetická energie při rotačním pohybu tělesa*** kolem osy procházející těžištěm (a předpokládejme jako dříve nejjednodušší případ **pevné osy**), která bude samozřejmě opět vyjádřena jako součet kinetických energií všech hmotných bodů, s využitím známého vztahu pro obvodovou rychlost kruhového pohybu:

$$\boxed{\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k}$$



Pro výpočet kinetické energie potřebujeme ovšem jen velikost tohoto vektoru (viz obr.) :

$$v_k = \left| \vec{\omega} \times \vec{r}_k \right| = \omega \cdot r \cdot \sin\alpha = \omega \cdot R_k$$

kde R_k je poloměr kruhového pohybu, tj. kolmá vzdálenost hmotného bodu od osy rotace. Kinetická energie všech hmotných bodů tedy bude (dosadíme a vytkneme konstanty):

$$W_{kin} = \sum_{k=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_k v_k^2 = \sum_{k=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_k (\omega \cdot R_k)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \cdot R_k^{\,2} \right)$$

Nyní je právě čas pro zavedení nové fyzikální veličiny :

$$J = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot R_k^{\,2}$$

moment setrvačnosti tělesa

Pozn. : Povšimněte si, že tato **skalární** veličina je určena rozložením hmotných bodů vzhledem k dané ose otáčení, při **jiné ose** otáčení (u stejného tělesa) nabývá tedy zcela **odlišné** hodnoty.
Vzniklá poněkud nepřehledná situace, kdy **jedno těleso** má vlastně **nekonečně mnoho momentů setrvačnosti** (pro nekonečně mnoho možných os rotace), pak byla v teoretické mechanice vyřešena zavedením **tenzoru** setrvačnosti.

S využitím momentu setrvačnosti pak vztah pro kinetickou energii rotace nabude jednoduchého tvaru, který je formálně podobný vzorci pro translaci :

$$W_{kin} = \tfrac{1}{2} J\,\omega^2$$

kinetická energie tělesa při rotaci

Celkem pak, pro **obecný pohyb** tělesa, lze kinetickou energii vyjádřit jako **součet** obou předchozích výrazů pro energie jeho translačního a rotačního pohybu :

$$W_{kin} = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} J\,\omega^2$$

kinetická energie pevného tělesa (při obecném pohybu)

Jak ale získáme potřebné veličiny (v a ω) pro dosazení do této rovnice?
Bude nutno najít a vyřešit „**pohybové rovnice tělesa**“ - pro jeho pohyb translační i rotační :

Z předchozích kapitol víme, že translace tělesa je určena pohybem těžiště . Proto rychlost v translačního pohybu tělesa, rovnou rychlosti pohybu těžiště, získáme vyřešením pohybové rovnice těžiště, kterou již známe z obecných vztahů pro soustavu hmotných bodů :

$$m \cdot \frac{d^2 \vec{r}_o}{dt^2} = \vec{F}^{\,E}$$

pohybová rovnice těžiště

Pozn. : Připomeňme, že uvedená rovnice vznikla z první impulzové věty poté, když jsme definovali těžiště a přiřadili jsme mu vlastnosti celé soustavy (tělesa) – hmotnost , hybnost a působící sílu. Těžiště tělesa se podle této rovnice pohybuje jako hmotný bod o hmotnosti celého tělesa, na který působí výsledná vnější síla.

Pohybová rovnice těžiště je proto první pohybovou rovnicí tělesa.

Dále už také víme, že existuje matematický vztah popisující rotační pohyb tělesa :

$$\boxed{\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}^{E}}$$

2. věta impulzová

Poznali jsme, že tato rovnice byla sice odvozena pro inerciální souřadné soustavy, ale že „náhodou“ (z důvodu vhodně zvolených vlastností těžiště) platí také v soustavě těžišťové - a může tedy vždy jednoznačně popisovat **rotaci kolem osy jdoucí těžištěm** .

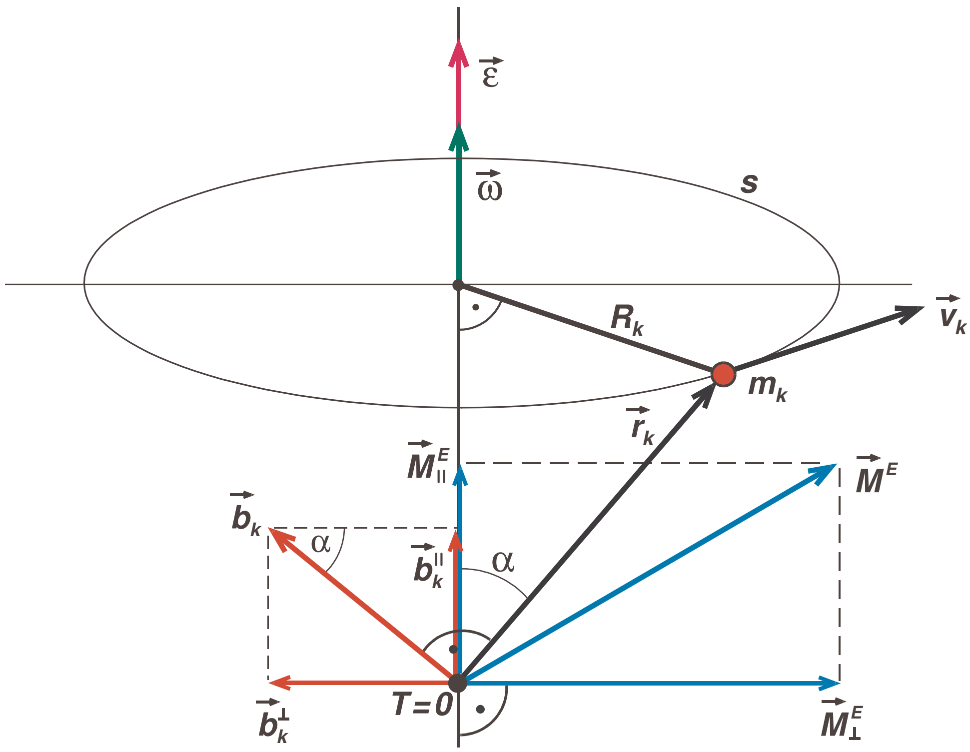
Potřebná úhlová rychlost ω se v této rovnici ale přímo nevyskytuje , naším dalším úkolem proto bude „transformace“ 2.věty do nových proměnných – úhlových veličin :

Napíšeme základní tvar 2.věty impulsové s rozepsáním jednotlivých momentů hybnosti :

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k = \vec{M}^{E}$$

A provedeme **rozklad** všech vektorů do **složky rovnoběžné** s osou rotace a do **složky kolmé** k této ose - správně v prostoru vlastně do dvou složek kolmých k ose rotace - ovšem na obrázku provedeném v „poloperspektivním“ zobrazení je pro jednoduchost zakreslena pouze jediná kolmice k ose (druhá by vedla kolmo k nákresně), stejně tak i rovnice obsahuje pouze jednu kolmou složku :

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}(\vec{b}_k^{\parallel} + \vec{b}_k^{\perp}) = \vec{M}_{\parallel}^{E} + \vec{M}_{\perp}^{E}$$



Levou stranu upravíme podle pravidla o derivaci součtu funkcí :

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k^{\,||} + \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k^{\,\perp} = \vec{M}_{||}^{E} + \vec{M}_{\perp}^{E}$$

Osy složek jsou v případě **pevné osy rotace** stabilně stanoveny (je to vlastně náš kartézský **těžišťový** souřadný systém), proto **složky vektorů i jejich časové změny mají stejný směr** (těchto os).

Z rovnosti vektorů na pravé a levé straně rovnice pak plyne i rovnost jejich složek, tedy platí :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k^{\,||} = \vec{M}_{||}^{E}} \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k^{\,\perp} = \vec{M}_{\perp}^{E}}$$

Věnujme se dále rovnoběžným složkám : Vypočítejme rovnoběžnou složku momentu hybnosti libovolného hmotného bodu (postačí její velikost) :

$$b_k^{||} = \left|\vec{b}_k\right|\cdot\sin\alpha = \left|\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k\right|\cdot\sin\alpha = (\,r_k\cdot m_k\,v_k\cdot 1\,)\cdot\sin\alpha = R_k\cdot m_k\cdot v_k$$

Použijeme ještě vztah pro velikost obvodové rychlosti kruhového pohybu :

$$v_k = \left|\vec{v}_k\right| = \left|\vec{\omega}\times\vec{r}_k\right| = \omega\cdot r_k\cdot\sin\alpha = \omega\cdot R_k$$

Po jejím dosazení bude rovnoběžná složka momentu hybnosti :

$$b_k^{||} = R_k\cdot m_k\cdot\omega\cdot R_k = m_k\cdot\omega\cdot R_k^2$$

Protože na levé i pravé straně rovnice jsou velikosti rovnoběžných vektorů, lze psát tuto rovnici vektorově :

$$\vec{b}_k^{\,||} = m_k\cdot R_k^2\cdot\vec{\omega}$$

Tento vztah pak dosadíme do rovnice pro časovou změnu rovnoběžné složky momentu hybnosti :

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k^{\,||} = \vec{M}_{||}^{E}$$

A upravíme její levou stranu s využitím definice momentu setrvačnosti tělesa pro rotaci kolem dané osy :

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k^{\,||} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}m_k\cdot R_k^2\cdot\vec{\omega} = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{k=1}^{N}m_k\cdot R_k^2\,\Big)\cdot\vec{\omega} = \frac{d}{dt}(\,J\cdot\vec{\omega}\,) = J\cdot\frac{d}{dt}\vec{\omega} = J\cdot\vec{\varepsilon}$$

Vzniká tak jednoduchá rovnice, formálně podobná (dobré pro zapamatování) obyčejné Newtonově pohybové rovnici :

$$\boxed{J \cdot \vec{\varepsilon} \; = \; \vec{M}_{\parallel}^{E}}$$

pohybová rovnice pro rotaci tělesa kolem pevné osy

Slovní vyjádření : ***úhlové zrychlení rotačního pohybu tělesa je přímo úměrné rovnoběžné složce výsledného momentu vnějších sil*** (a nepřímo úměrné momentu setrvačnosti tělesa).

Odvodili jsme tak : **druhou pohybovou rovnici tělesa**

ve specifické formě pro rotační pohyb kolem **pevné osy jdoucí těžištěm** tělesa (obrovský počet technických aplikací však dodává této „zjednodušené" rovnici vysoký stupeň důležitosti).

Pozn. : Kolmá složka (kolmé složky) momentu vnějších sil se snaží pouze změnit polohu osy rotace (vyvrátit ji), u teoretické pevné osy ovšem bezvýsledně.

Přechod k reálnému tělesu

Již dávno je známo, že reálná tělesa se skládají z atomů (molekul, iontů) o rozměrech přibližně 10^{-10} m, což je jistě velmi dobrá představa soustavy hmotných bodů.
Jejich obrovský počet - řádu Avogadrova čísla (10^{23} na 1 mol) - sice prakticky znemožňuje výpočty matematických součtů (sum), dovolí nám však představu hmoty jako **kvazispojitého prostředí** .
Pak lze definovat veličinu (dV je zvolený libovolný nepatrný element objemu a dm je jeho hmotnost) :

$$\boxed{\rho \; = \; \frac{dm}{dV}}$$

hustota hmoty

Slovní vyjádření : ***hustota hmoty je (číselně) rovna hmotnosti jednotkového objemu v daném místě zkoumaného tělesa*** (obecně je to skalární funkce místa).

Potom těleso rozdělené na veliký (nekonečný) počet objemových elementů je vlastně limitním případem soustavy hmotných bodů o hmotnostech :

$dm = \rho \cdot dV$

A všechny dříve probrané matematické sumy přecházejí v této limitě nekonečného počtu objemových elementů na **určité (objemové) integrály** , například :

$$\boxed{m \; = \; \iiint_V \rho \cdot dV}$$

celková hmotnost tělesa

$$\boxed{\vec{r}_o = \frac{1}{m} \iiint\limits_V \vec{r} \cdot \rho \cdot dV}$$

těžiště tělesa

$$\boxed{J = \iiint\limits_V R^2 \cdot \rho \cdot dV}$$

moment setrvačnosti

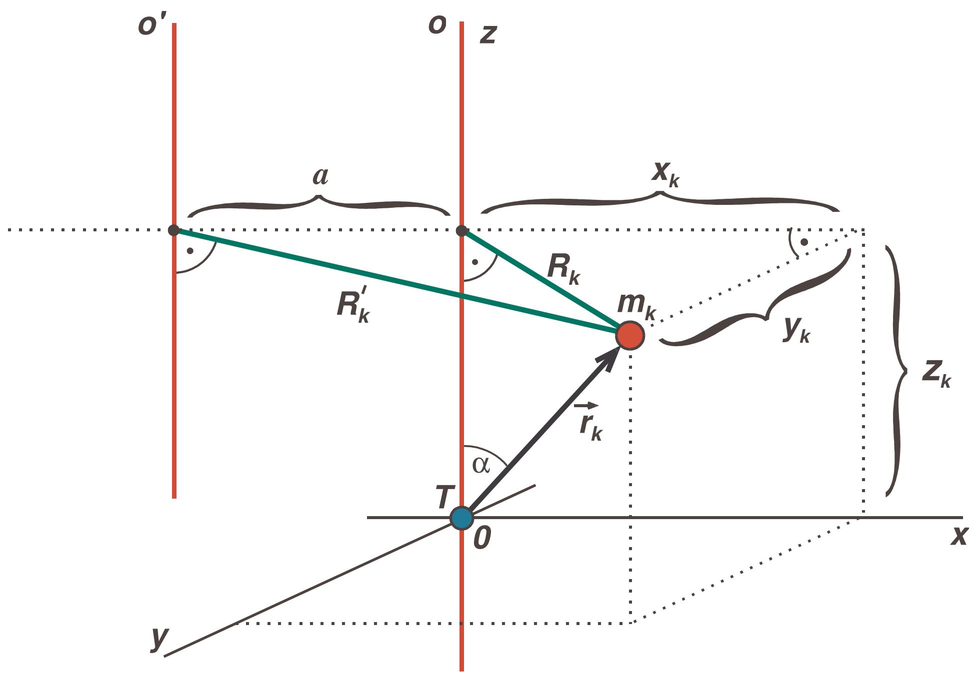
Tyto integrály, eventuálně i další podobné výrazy pro celkovou hybnost a celkový moment hybnosti, mohou být samozřejmě aplikovány nejen na pevná tělesa, ale i na kvazispojité prostředí kapalin a plynů (kdy ovšem nemá smysl například veličina momentu setrvačnosti).

Doplněk 1 : ***Steinerova věta***

Již při zavedení momentu setrvačnosti jsme si uvědomili jednoznačnou závislost této veličiny na rozložení hmotných bodů soustavy (tělesa) – konkrétně na jejich vzdálenosti od uvažované ose rotace. Je zřejmé, že s rostoucí vzdáleností tělesa od osy rotace, se moment setrvačnosti výrazně zvyšuje (ve vzorci jsou kvadráty vzdálenosti hmotných bodů od osy) a to neomezeně – a naopak při přibližování tělesa k rotační ose musí klesat k nějaké nenulové minimální hodnotě (kromě nereálného případu, kdy by všechny hmotné body tělesa ležely přesně v ose rotace).

Při rozboru tohoto problému se opět projeví výjimečnost hmotného středu tělesa, protože při zadaném směru – tj. pro všechny možné rovnoběžné osy rotace - je nejmenší právě moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm .

Představme si tedy nějakou osu rotace o a jinou osu rotace o' s ní rovnoběžnou (viz obrázek) :



Podle definice platí pro moment setrvačnosti vzhledem k ose o (viz první část této kapitoly) :

$$J = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot R_k^{\,2}$$

kde R_k je kolmá vzdálenost hmotného bodu m_k od osy rotace o .

Potom pro moment setrvačnosti vzhledem k jiné rovnoběžné ose o' bude platit analogicky:

$$J' = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot (R'_k)^2$$

Kolmou vzdálenost R'_k stejného hmotného bodu od druhé osy rotace vyjádříme s využitím souřadnic na obrázku :

$$(R'_k)^2 = (a + x_k)^2 + y_k^{\,2}$$

Tento výraz můžeme upravit umocněním a seskupením členů :

$$(R'_k)^2 = (a + x_k)^2 + y_k^{\,2} = a^2 + x_k^{\,2} + 2 a x_k + y_k^{\,2} = a^2 + R_k^{\,2} + 2 a x_k$$

Neboť podle obrázku platí :

$$R_k^{\,2} = x_k^{\,2} + y_k^{\,2}$$

Nyní dosadíme do vztahu pro čárkovaný moment setrvačnosti , roznásobíme a rozdělíme členy :

$$J' = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot (R'_k)^2 = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot (a^2 + R_k^{\,2} + 2 a x_k) = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot a^2 + \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot R_k^{\,2} + \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot 2 a x_k$$

V prvním a třetím členu na pravém straně lze vytknout konstanty :

$$J' = a^2 \cdot \sum_{k=1}^{N} m_k + \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot R_k^{\,2} + 2 a \cdot \sum_{k=1}^{N} m_k x_k$$

Dále můžeme v prvním členu sečíst hmotnosti všech hmotných bodů do celkové hmotnosti tělesa, druhý člen je přímo původní moment setrvačnosti vůči ose jdoucí těžištěm a třetí člen je nulový, neboť v těžišťové soustavě platí vektorová rovnice (plynoucí z nulového průvodiče těžiště) :

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k = 0$$

A tato rovnice je ekvivalentní třem skalárním rovnicím pro jednotlivé souřadnice :

$$\sum_{k=1}^{N} m_k x_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{N} m_k y_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{N} m_k z_k = 0$$

Dostáváme tak jednoduchý vztah :

$$\boxed{J' = J + m \cdot a^2}$$

Steinerova věta

Tento vztah nám dobře dokazuje **minimální hodnotu momentu setrvačnost pro osu jdoucí těžištěm** , neboť jakákoliv jiná (rovnoběžná) osa má moment setrvačnosti zvětšený o součin hmotnosti tělesa a kvadrátu vzdálenosti obou os (což je vlastně moment setrvačnosti těžiště tělesa k ose rotace).

Steinerova věta také výrazně zjednodušuje výpočty momentů setrvačnosti k libovolným rotačním osám (při znalosti momenty setrvačnosti vůči osám jdoucím těžištěm tělesa).

Doplněk 2 : ***Kyvadla***

Fyzické kyvadlo

Nazýváme tak **jakékoliv těleso** , které je otočné (ideálně bez tření) kolem **pevné vodorovné osy** neprocházející těžištěm. Je jasné, že v klidové rovnovážné poloze je těžiště tělesa v nejnižší možné poloze (a je to místo jeho stabilní rovnováhy).

Jestliže kyvadlo z rovnovážné polohy vychýlíme (do nějaké krajní polohy) a následně uvolníme, objeví se moment vnější síly (tíhy tělesa), který působí „proti výchylce" – a vrací kyvadlo zpět do rovnovážné polohy.

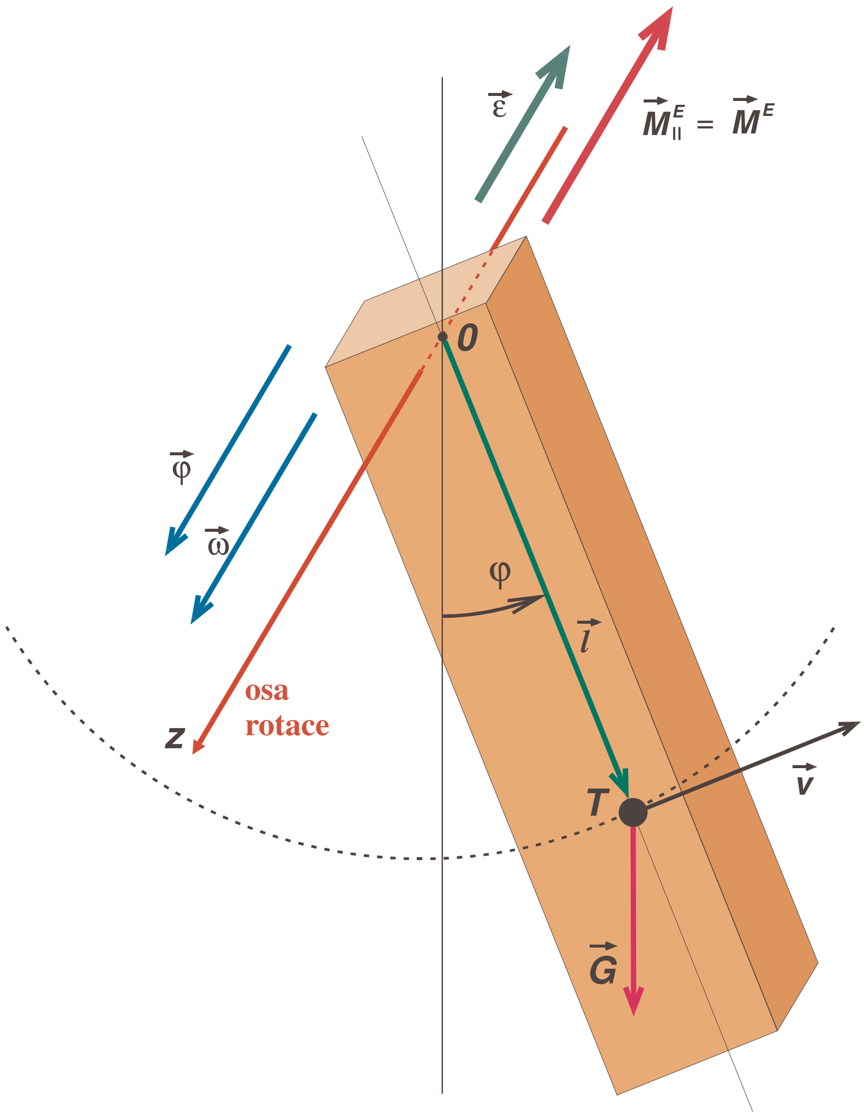
Během tohoto pohybu se ovšem potenciální energie kyvadla vzniklá jeho vychýlením přeměňuje podle zákona zachování mechanické energie na energii kinetickou , takže se kyvadlo v dolní poloze nezastaví, ale pokračuje v pohybu na druhou stranu, dokud se jeho kinetická energie zase nepřemění zpět na energii potenciální (ve druhé krajní poloze) a opět se vrací k rovnovážné poloze, ….atd. - tak vzniká **periodický kmitavý pohyb** kyvadla.

Tento pohyb je ovšem principiálně pohybem **rotačním** , a tedy při jeho exaktním (kvantitativním) řešení musíme vycházet z rovnice pro rotační pohyb tělesa kolem pevné osy :

$$J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_{||}^{E}$$

Nejprve určíme směr a orientaci vektorových veličin v této rovnici, přitom využijeme našich znalostí vektorového zápisu úhlových veličin (z kapitoly „Kinematika hmotného bodu").

Na následujícího obrázku (který je pro větší názornost v perspektivním zobrazení) je kyvadlo zakresleno při výchylce doprava, kdy těžiště stoupá do pravé krajní polohy.



Počátek vztažné inerciální soustavy O je umístěn na pevné rotační ose o (do které můžeme položit jednu ze souřadných os, například osu z), polohový vektor těžiště T je označen jako $\vec{l}$.

Kladný směr odečtu opsaného úhlu φ je standardně zvolen proti směru hodinových ručiček (viz obr.). Základní výhodou pevné osy je to, že v ní leží všechny vektorové úhlové veličiny rotujícího tělesa (tj. všech jeho bodů) – vektor opsaného úhlu $\vec{\varphi}$, úhlová rychlost $\vec{\omega}$ a úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$.

Při rychlosti těžiště $\vec{v}$ podle obrázku (těleso se právě vychyluje z rovnovážné polohy doprava a jeho těžiště stoupá vzhůru) je kladná orientace vektorů $\vec{\omega}$ a $\vec{\varphi}$ definována podle standardní volby - aby spolu s vektorem poloměru kruhového pohybu (zde $\vec{l}$) a vektorem rychlosti $\vec{v}$ tvořily pravotočivý systém - tj. oba vektory směřují z nákresny k nám (v perspektivě na obrázku zprava doleva) – a stejně tak zvolíme kladný směr (rotační) osy z .

Rotace tělesa se ovšem zpomaluje (a nakonec se v pravém krajním bodě zastaví), úhlová rychlost $\vec{\omega}$ tedy klesá – proto je orientace vektoru úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$ <u>právě opačná</u> – v záporném směru osy z (do nákresny, viz obr.).

<u>Poznámka :</u> Zopakujte si za D.cv. vektorové definice úhlových veličin a promyslete, jak se budou při dalším pohybu kyvadla měnit jejich velikosti i orientace.

Jak víme z předchozí kapitoly, je právě těžiště nejjednodušším <u>působištěm tíhy</u> tělesa, která je jedinou vnější silou. Její moment je pak :

$$\vec{M}^{E} = \vec{l} \times \vec{G}$$

Uvážíme-li podle obrázku, že oba vektory $\vec{l}$ a $\vec{G}$ leží v jedné rovině (nákresně), kolmé k ose rotace, pak podle definice vektorového součinu také vektor <u>silového momentu</u> má přesně <u>směr této osy</u> (viz obrázek). Je tedy vektor silového momentu přímo roven své <u>složce rovnoběžné s osou rotace</u> (a také samozřejmě svojí z – ové složce)

$$\vec{M}^{E} = \vec{M}^{E}_{||}$$

A jeho velikost je (jako velikost vektorového součinu) :

$$M^{E} = M^{E}_{||} = l \cdot G \cdot \sin\varphi = l \cdot m\, g \cdot \sin\varphi$$

<u>Orientace</u> tohoto vektoru je ale <u>**opačná**</u> než orientace vektoru úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ a opsaného úhlu $\vec{\varphi}$ - má směr záporné části rotační osy, tj. osy z (směřuje do nákresny, viz obrázek). Proto je jeho z-ová <u>souřadnice</u> záporná a v absolutní velikosti rovná velikosti vektoru (souřadnice na ostatních osách x a y jsou samozřejmě nulové), tedy :

$$(M^{E})_{z} = (M^{E}_{||})_{z} = -\, l \cdot m\, g \cdot \sin\varphi$$

Vidíme také, že orientace rovnoběžné složky momentu síly je naprosto <u>stejná</u> jako vektoru úhlového zrychlení $\vec{\varepsilon}$ - oba vektory tedy mají záporné z-ové souřadnice (a nulové souřadnice x a y).

Tyto výsledky jsou v dokonalé shodě s pohybovou rovnicí (jak jinak) :

$$J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}^{E}_{||}$$

protože při vždy kladném momentu setrvačnosti J znamená tato rovnice <u>přímou úměru</u> vektorů $\vec{\varepsilon}$ a $\vec{M}^{E}_{||}$ - tj. jejich stejný směr a orientaci.

Abychom mohli pohybovou rovnici pro rotaci konkrétně vyřešit, musíme ji rozepsat do souřadnic :

Protože souřadnice vektorů již máme rozmyšlené, je nám jasné, že dostaneme jedinou nenulovou rovnici, pro z-ové souřadnice :

$$J \cdot \varepsilon = -\ l \cdot m\, g \cdot \sin\varphi$$

Úhlové zrychlení můžeme standardně vyjádřit jako druhou derivaci opsaného úhlu :

$$J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\ l \cdot m\, g \cdot \sin\varphi$$

Převedení na levou stranu a osamostatnění druhé derivace vede ke standardnímu tvaru diferenciální rovnice :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{l \cdot m\, g}{J} \cdot \sin\varphi = 0$$

Pokud zavedeme novou veličinu :

$$\boxed{\omega^2 = \frac{l \cdot m\, g}{J}}$$

a použijeme matematického formalismu pro označení derivace, vznikne nejjednodušší možný tvar rovnice :

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \sin\varphi = 0}$$

pohybová rovnice fyzického kyvadla *(obecná)*

Její řešení není jednoduché, nebudeme ho provádět, také z důvodu, že zásadní význam má zjednodušený tvar této rovnice – za předpokladu malých výchylek kyvadla (matematicky nekonečně malých), tj. :

$$\boxed{\varphi \to 0}$$

Pak totiž platí pro funkci sinus : $\boxed{\sin\varphi \cong \varphi}$

A dostaneme :

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \varphi = 0}$$

pohybová rovnice fyzického kyvadla *(pro malé výchylky)*

Tato rovnice je formálně matematicky stejná s rovnicí lineárního harmonického oscilátoru, kterou budeme teprve probírat v kapitole „Kmity a vlny“ .

$$\ddot{y} + \omega^2 \cdot y = 0$$

Přitom si ukážeme, že jejím obecným řešením pro výchylku y hmotného bodu je známá sinusovka :

$$y = y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_o)$$

V tomto vztahu je A amplituda kmitů - maximální hodnota výchylky, φ_o je fázová konstanta a ω je úhlová frekvence vyjádřená pomocí doby kmitu T nebo pomocí frekvence kmitů f :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

Řešení naší pohybové rovnice fyzického kyvadla tedy musí také být formálně stejná sinusovka, ale pro úhlovou výchylku :

$$\boxed{\varphi = \varphi(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_o)}$$

řešení pohybové rovnice kyvadla *(pro malé výchylky)*

Fyzické kyvadlo tedy při malých výchylkách koná tzv. ***harmonické kmity*** s úhlovou frekvencí :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{l \cdot m\,g}{J}}}$$

úhlová frekvence fyzického kyvadla *(pro malé výchylky)*

Doba kmitu fyzického kyvadla je pak :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{l \cdot m\,g}}}$$

doba kmitu fyzického kyvadla *(pro malé výchylky)*

Doba kmitu je časovou **periodou** pohybu daného kmitavého pohybu, tj. **dobou za kterou se opakuje** nějaký (libovolný) pohybový stav - u kyvadla ji lze názorně popsat jako dobu pohybu kyvadla z jedné krajní polohy do druhé a zpět .

Často se také používá veličina **doba kyvu** – jako doba, za kterou se uskuteční jeden kyv, tj. pohyb kyvadla z jedné krajní polohy do druhé :

$$\boxed{T_k = \frac{T}{2} = \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{l \cdot m\,g}}}$$

doba kyvu fyzického kyvadla *(pro malé výchylky)*

Nezapomeňme, že uváděné vztahy platí přesně pouze v limitě pro nekonečně malé výchylky kyvadla. Při nenulových výchylkách se tyto doby odchylují, např. :

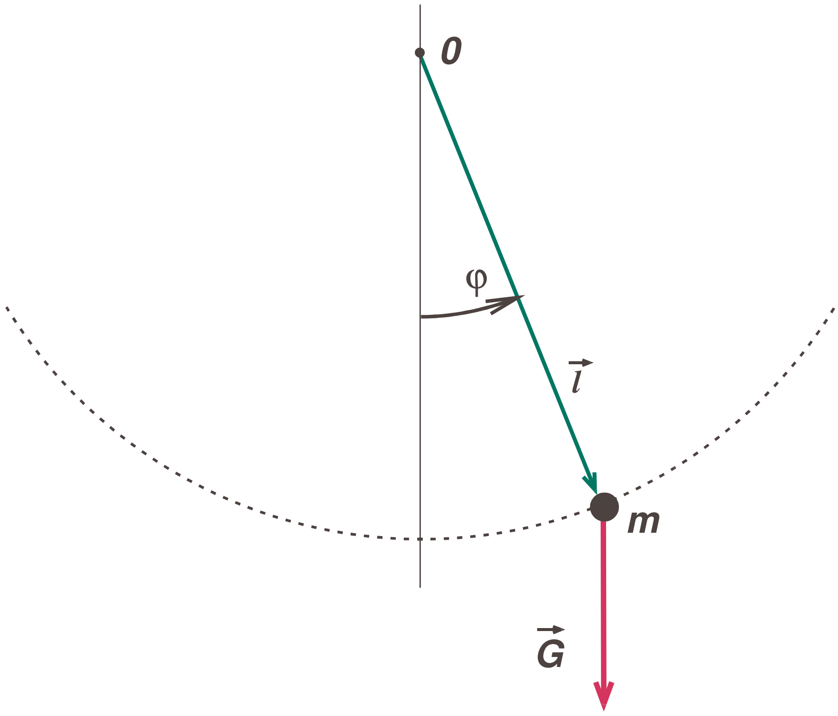
při amplitudě kmitů $A = 1°$ ..... o $0{,}002\ \%$

$5°$ .... $0{,}05\ \%$

$10°$ ...... $0{,}2\ \%$

Při praktických experimentech (měření) se doporučují maximální výchylky (amplitudy) do $5°$.

Speciálním, mezním případem fyzického kyvadla je tzv. ***matematické kyvadlo*** , které tvoří malá kulička hmotnosti m na velmi lehkém závěsu délky l , teoreticky můžeme říci, že to je „**hmotný bod na nehmotném tuhém vlákně**“ (viz obrázek).



Všechny výše uvedené vzorce zůstávají v platnosti a navíc můžeme lehce vypočítat moment setrvačnosti tohoto kyvadla (viz definici v první části této kapitoly) :

$$J = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot R_k^{\ 2} = m \cdot l^2$$

Po dosazení do vztahu pro dobu kmitu dostaneme :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{l \cdot m\, g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot l^2}{l \cdot m\, g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dostáváme tak velmi zajímavý výsledek, že kmitání matematického kyvadla vůbec **nezávisí na hmotnosti** , ale je funkcí pouze délky jeho závěsu :

$$\boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

doba kmitu matematického kyvadla *(pro malé výchylky)*

Další veličinou (parametrem) v získaném vztahu je gravitační tíhové zrychleni (gravitační konstanta), naskýtá se tak možnost jeho stanovení ze změřené doby kmitu a z délky závěsu kyvadla.

Protože matematické kyvadlo je spíše abstraktní teoretický pojem a pokusy o jeho realizaci vedou k výrazným nepřesnostem, používá se k takovému měření gravitační konstanty kyvadlo fyzické.
Základní nevýhodou fyzického kyvadla je ovšem to, že do vzorce pro dobu kmitu potřebujeme znalost momentu setrvačnosti. To lze ale obejít následujícím způsobem :

Jestliže máme k dispozici fyzické kyvadlo s momentem setrvačnosti J (a dalšími parametry m a l) a toto kyvadlo má určitou dobu kmitu podle výše uvedeného vztahu :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{l \cdot m g}}$$

Pak jistě existuje nějaké (a to jediné) matematické kyvadlo s takovou délkou (označme ji l_{red}), že jeho doba kmitu je stejná :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_{red}}{g}}$$

Z rovnosti těchto vztahů pak plyne :

$$\boxed{l_{red} = \frac{J}{l \cdot m}}$$

redukovaná délka fyzického kyvadla

Slovně : ***Redukovaná délka fyzického kyvadla je taková délka*** (myšleného) ***matematického kyvadla, které má stejnou dobu kmitu jako dané fyzické kyvadlo.***

Při její znalosti bychom pak jistě mohli ze změřené doby kmitu kyvadla **určit gravitační tíhové zrychlení** v daném místě. Redukovanou délku jakéhokoliv fyzického kyvadla lze jistě principiálně vypočítat podle uvedeného vzorce z hmotnosti kyvadla, z jeho momentu setrvačnosti a ze vzdálenosti těžiště od osy otáčení. Takový výpočet by ale byl zatížen značnou chybou , plynoucí z přesnosti změření tvaru kyvadla, přesnosti jeho výroby a z vlastností použitého materiálu (homogenita), proto se stanovení redukované délky provádí následujícím experimentálním postupem :

Představme si, že u daného fyzického kyvadla ve vzdálenosti l_{red} od osy otáčení (na opačnou stranu od těžiště) vytvoříme **druhou osu** otáčení – vznikne tzv. ***reverzní kyvadlo*** (kyvadlo se dvěma osami). Pak je možno dokázat, že doba kmitu kolem této druhé osy bude přesně **stejná** jako kolem osy první .

Pozn. : Pokuste se sami odvodit - ukažte, že redukovaná délka pro kmity kolem druhé osy je stejná jak pro první osu, přitom použijte Steinerovu větu.

Je tedy také zřejmé, že k libovolné ose rotace fyzického kyvadla (kromě osy jdoucí těžištěm) vždy existuje druhá „reverzní“ osa se stejnou dobou kmitu.

Každé fyzické kyvadlo (tj. každé těleso) má proto nekonečně mnoho možných dvojic rotačních os se stejnými dobami kmitu (doba kmitu jedné dvojice os se samozřejmě liší od doby kmitu jiné dvojice).

Právě tuto úvahu můžeme dobře experimentálně využít : když u daného fyzického kyvadla nalezneme jakékoliv dvě různé osy , které mají stejné doby kmitu , pak jejich vzdálenost je rovná redukované délce tohoto kyvadla.

Tyto hodnoty můžeme pak dosadit do vzorce pro matematické kyvadlo :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_{red}}{g}}$$

A z něj lehce vypočítáme gravitační tíhové zrychlení :

$$\boxed{g = \frac{4\pi^2 \cdot l_{red}}{T^2}}$$

Hledání dvou os se stejnými dobami kmitů je ovšem také jistě zatíženo mnohými nepřesnostmi, neboť musíme posunovat osy, kontrolovat jejich rovnoběžnost a měřit jejich vzdálenost (a doby kmitu).

Proto se v praxi postupuje tak, že tyto **osy se předem vyrobí** a přesně se stanoví jejich neměnná vzdálenost. Při experimentu se pak **měří pouze doby kmitu kolem obou os** a **mění se moment setrvačnosti** kyvadla (nějakou posuvnou částí na kyvadle), **až se nalezne shoda jejich dob kmitu** (a tato doba se spolu se vzdáleností os dosadí do uvedené rovnice - viz úloha ve fyzikálním praktiku).

(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 03/2006**

rev. 03/2007 – přidán Doplněk 1 (Steinerova věta a Doplněk 2 (kyvadla)