Aplikace impulzových vět

Na základě všech Newtonových zákonů jsme odvodili dva základní vztahy klasické mechaniky - **impulzové věty** – které mají zásadní důležitost pro studium mechanického pohybu nejen vybraných soustav hmotných bodů, ale vlastně veškerého hmotného světa kolem nás.
V první řadě nyní dokončíme analýzu obecného pohybu těles, započatou v minulé kapitole :

a) Obecný pohyb soustavy hmotných bodů (tělesa)

Dospěli jsme již k zásadnímu poznatku, že obecný pohyb soustavy hmotných bodů (tělesa) lze vytvořit ze dvou relativně jednoduchých pohybů – translace a rotace kolem osy jdoucí těžištěm.

Translaci tělesa ve zvolené (inerciální) soustavě souřadnic pak dokonale a bez problémů popisuje **první impulzová věta** .
Jestliže si dále uvědomíme, že **druhá impulzová věta** popisuje rotaci kolem osy jdoucí počátkem zvolené (inerciální) souřadné soustavy, potom tedy pro požadovanou **rotaci kolem osy procházející těžištěm** musíme tuto impulsovou větu napsat a používat v takové vztažné soustavě souřadnic, jejíž počátek leží v těžišti – a to je přece naše známá a (pro stanovení rovnováhy gravitačních sil) již v minulé kapitole použitá - **těžišťová soustava souřadnic** .

A nyní tvrdě narazíme na jednu **zásadní potíž** : druhá impulzová věta byla odvozená a platí pouze v **inerciálních** soustavách - ale **těžišťovou soustavu nelze obecně považovat za inerciální** , neboť těžiště jako hmotný bod se pod vlivem vnějších sil může pohybovat po libovolné křivočaré dráze, tj. s libovolným zrychlením.
Musíme proto zjistit, **jak se změní druhá impulzová věta** v neinerciální těžišťové soustavě – tedy také jak se změní pohyb , který tento vztah popisuje (rotace kolem osy jdoucí těžištěm) - v závislosti na zrychleném pohybu těžiště (tj. na translaci tělesa).
Stručně řečeno – **jak závisí rotační pohyb** (kolem osy jdoucí těžištěm) **na translaci tělesa.**

Provedeme proto nyní převod - **transformaci** - druhé věty impulzové do **těžišťové** souřadné soustavy :
Nejprve napišme známý standardní tvar 2. věty impulsové v nějaké inerciální soustavě souřadnic S :

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}^{E}$$

Dále musíme dosadit za celkový moment hybnosti a výsledný moment vnějších sil. Podle definičních vztahů (z minulé kapitoly) platí :

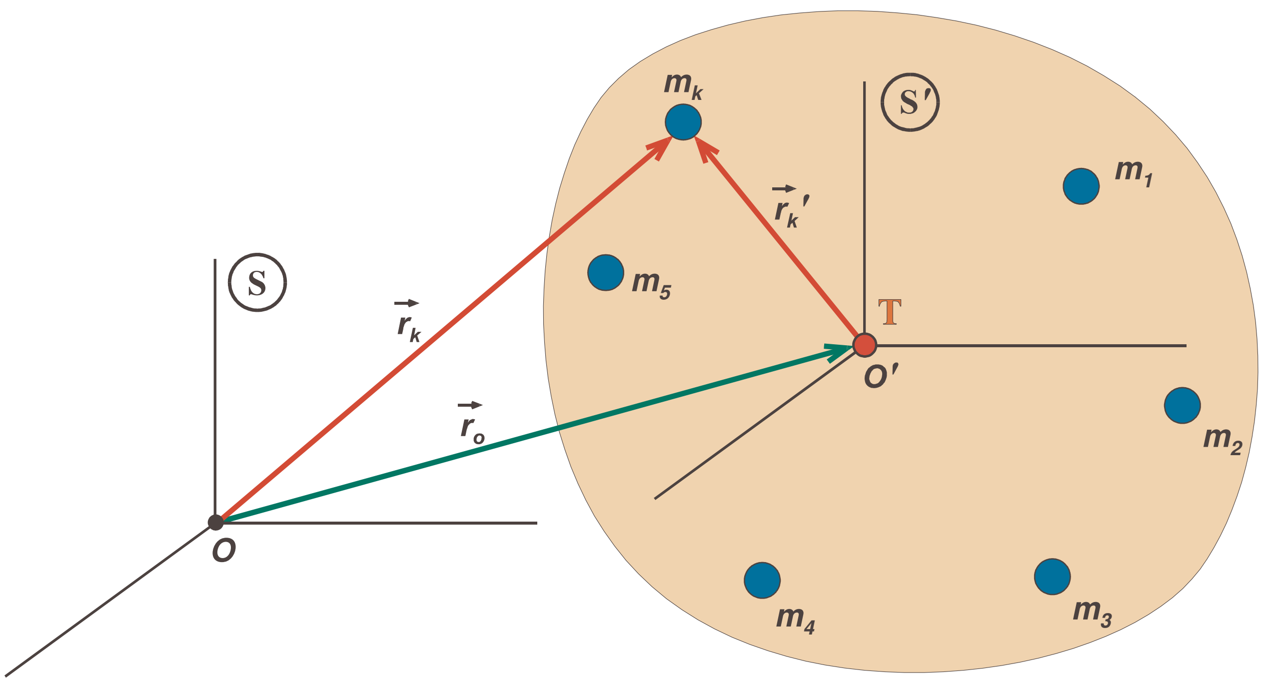
$$\vec{B} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 + ... + \vec{b}_N = \sum_{k=1}^{N} \vec{b}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt}$$

$$\vec{M}^E = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^E + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2^E + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3^E + ... + \vec{r}_N \times \vec{F}_N^E = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_k^E = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^E$$

Pro dosazení použijeme konkrétně poslední výrazy na pravých stranách, které obsahují průvodiče, a dostaneme :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^E}$$

A nyní převedeme tento vztah do těžišťové soustavy souřadnic S' (viz obr.) :



Připomeňme si **obecný převodní vztah** mezi průvodiči hmotného bodu v obou soustavách, který jsme odvodili v kapitole „Inerciální a neinerciální soustavy“ :

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'$$

Jestliže uvážíme, že vektorem $\vec{R}$ spojujícím počátky obou soustav je zde průvodič těžiště $\vec{r}_o$, pak pro každý hmotný bod můžeme psát (viz obr.) :

$$\vec{r}_k = \vec{r}_o + \vec{r}_k\,'$$

A tento vztah dosadíme do výše připraveného tvaru 2. věty (v rámečku) :

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}(\vec{r}_o+\vec{r}_k\,')\times m_k\,\frac{d(\vec{r}_o+\vec{r}_k\,')}{dt}\right\} = \sum_{k=1}^{N}(\vec{r}_o+\vec{r}_k\,')\times\vec{F}_k^E$$

Upravme výraz na levé straně roznásobením dvojčlenů :

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times m_k\,\frac{d\vec{r}_o}{dt}\right\}+\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times m_k\,\frac{d\vec{r}_k\,'}{dt}\right\}+\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\,'\times m_k\,\frac{d\vec{r}_o}{dt}\right\}+\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\,'\times m_k\,\frac{d\vec{r}_k\,'}{dt}\right\}$$

Ve druhém členu provedeme vytknutí a ve třetím členu přesuneme skaláry (hmotnosti) a také vytkneme :

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times m_k\,\frac{d\vec{r}_o}{dt}\right\}+\frac{d}{dt}\left\{\vec{r}_o\times\sum_{k=1}^{N}m_k\,\frac{d\vec{r}_k\,'}{dt}\right\}+\frac{d}{dt}\left\{(\sum_{k=1}^{N}m_k\,\vec{r}_k\,')\times\frac{d\vec{r}_o}{dt}\right\}+\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\,'\times m_k\,\frac{d\vec{r}_k\,'}{dt}\right\}$$

Nyní je zřejmé, že oba tyto členy musí být nulové , neboť v těžišťové soustavě vždy platí (viz výše vlastnosti těžiště) :

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{r}_k\,' = 0$$

Na levé straně rovnice tedy zbudou jen dva členy :

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times m_k\,\frac{d\vec{r}_o}{dt}\right\} + \frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\,'\times m_k\,\frac{d\vec{r}_k\,'}{dt}\right\} = \sum_{k=1}^{N}(\vec{r}_o+\vec{r}_k\,')\times\vec{F}_k^E$$

Pokračujme dále v úpravách provedením derivace prvního členu levé strany a roznásobením dvojčlenu na straně pravé :

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{d\vec{r}_o}{dt}\times m_k\,\frac{d\vec{r}_o}{dt} + \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times m_k\,\frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\,'\times m_k\,\frac{d\vec{r}_k\,'}{dt}\right\} = \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times\vec{F}_k^E + \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\,'\times\vec{F}_k^E$$

První člen nalevo je opět nulový (rovnoběžné vektory) a vzniklý druhý člen se vyruší s prvním členem pravé strany, jak nahlédneme po vytknutí a s využitím pohybové rovnice těžiště (tj. 1. věty impulsové) :

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times m_k\,\frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2}=\vec{r}_o\times\left(\sum_{k=1}^{N}m_k\right)\cdot\frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2}=\vec{r}_o\times m\cdot\frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2}=\vec{r}_o\times m\cdot\vec{F}^E=\vec{r}_o\times\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^E=\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times\vec{F}_k^E$$

Dostáváme tedy (již bez závorek) :

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\,'\times m_k\,\frac{d\vec{r}_k\,'}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\,'\times\vec{F}_k^E$$

Což je formálně naprosto stejná rovnice jako výchozí vztah, pouze v čárkovaných souřadnicích, tj. v souřadnicích těžišťové soustavy :

$$\boxed{\frac{d\vec{B}'}{dt} = \vec{M}'^{E}}$$

Vidíme, že z důvodu specifických vlastností hmotného středu se **tvar druhé věty impulzové** po přechodu do S' **vůbec nezměnil** - tento fyzikální zákon je tedy **invariantní** při transformaci do **těžišťové** souřadné soustavy - a v této soustavě pak **popisuje rotaci** vzhledem k **ose jdoucí** počátkem soustavy – **těžištěm** .

Jinak řečeno : protože se pohyb těžiště na výsledném vztahu vůbec neprojevuje, nemá tedy vliv ani na pohyb, který tento vztah popisuje, nebo-li :

Vlastní pohyb těžiště nemá vliv na rotaci soustavy hmotných bodů kolem osy jdoucí těžištěm.

A ještě jinak řečeno : **rotační pohyb** soustavy hmotných bodů kolem osy jdoucí těžištěm (který popisuje 2. impulzová věta) je **zcela nezávislý** na vlastním pohybu těžiště (popsaném 1. impulzovou větou) – tj. na **translačním pohybu** tělesa..

Tento principiální poznatek lze pak velmi účinně využít při popisu a sledování pohybů soustav hmotných bodů :

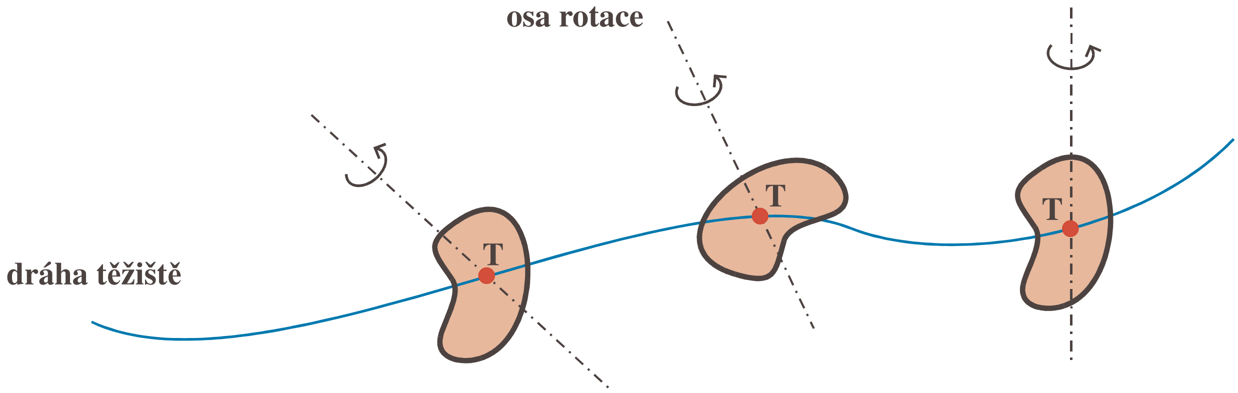
Jakýkoliv *obecný pohyb* soustavy hmotných bodů (tělesa) je vždy možné popsat jako složený ze dvou dílčích jednoduchých nezávislých pohybů , a to :

- z **translace - posuvného pohybu** tělesa, který je určen vlastním **pohybem těžiště** - jako hmotného bodu o hmotnosti celé soustavy na který působí výsledná vnější síla . Při tomto pohybu se všechny hmotné body soustavy pohybují stejným způsobem (stejnou rychlostí) na (geometricky) stejných drahách jako těžiště . Pro nalezení tohoto pohybu je potřeba vyřešit pohybovou rovnici těžiště – tj. první větu impulzovou :

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2} = \vec{F}^{E}}$$

- z **rotace - rotačního pohybu** tělesa kolem **osy jdoucí těžištěm** – způsobené výsledným momentem vnějších sil . Ke stanovení tohoto pohybu je potřeba v těžišťové soustavě řešit 2. větu impulzovou :

$$\boxed{\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}^{E}}$$



Prostudujme dále několik speciálních aplikací obou impulzových vět, kde získaných znalostí o obecném pohybu soustav hmotných bodů dobře využijeme :

b) Rovnováha tělesa (klidová)

Rovnováhu tělesa obvykle ztotožňujeme s jeho klidovým stavem (lze ale také řešit i rovnováhu pohybujícího se objektu, například cyklisty v zatáčce). Klidový stav tělesa ovšem znamená, že nedochází ani ke translačnímu, ani k rotačnímu pohybu tělesa, tj. **musí být rovna nule** jak **hybnost**, tak i **moment hybnosti** :

$$\boxed{\vec{P} = 0} \qquad \boxed{\vec{B} = 0}$$

Časové změny nulových funkcí jsou samozřejmě také nulové :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{B}}{dt} = 0$$

A z impulzových vět pak plyne i nulovost součtu všech vnějších sil i součtu všech momentů těchto sil :

$$\boxed{\vec{F}^E = \vec{F}_1^E + \vec{F}_2^E + \vec{F}_3^E + \dots + \vec{F}_N^E = 0}$$

podmínky rovnováhy tělesa

$$\boxed{\vec{M}^E = \vec{M}_1^E + \vec{M}_2^E + \vec{M}_3^E + \dots + \vec{M}_N^E = 0}$$

Rovnováha tělesa vyžaduje tak nejen **nulovou výslednici vnějších sil** ale také **nulový výsledný moment** vnějších sil (samozřejmě vzhledem k těžišti - ale uvažte, že neexistence rotačního pohybu musí znamenat i nulový silový moment vzhledem k libovolnému bodu).

Rovnováha tělesa znamená nejen rovnováhu vnějších sil, ale i rovnováhu jejich momentů.

Uvedené vztahy jsou základem ***statické mechaniky*** (statiky)

c) Uzavřená (izolovaná) soustava

Takové označení používáme pro soustavu hmotných bodů, na kterou z okolí nepůsobí **žádná vnější síla** . Je tedy nulová jak výslednice vnějších sil, tak výsledný vnější silový moment :

$$\boxed{\vec{F}^E = 0} \qquad \boxed{\vec{M}^E = 0}$$

Nesčíslné množství **aplikací** pak využívá toho, že uvedené vztahy mohou být splněny i ve **speciálním** případu - kdy na soustavu bude působit více vnějších sil (minimálně dvě), sice **nenulových** – které ale budou mít dohromady **nulovou výslednici** a také **nulový výsledný silový moment** (to jsou vlastně podmínky rovnováhy tělesa podle předchozího odstavce) :

$$\boxed{\vec{F}^E = \vec{F}_1^E + \vec{F}_2^E + \vec{F}_3^E + \ldots + \vec{F}_N^E = 0} \qquad \boxed{\vec{M}^E = \vec{M}_1^E + \vec{M}_2^E + \vec{M}_3^E + \ldots + \vec{M}_N^E = 0}$$

Podle impulzových vět jsou pak také nulové časové změny celkové hybnosti (také hybnosti těžiště, která se jí rovná) a celkového momentu hybnosti :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{p}_o}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{B}}{dt} = 0$$

A aplikace základních znalostí o derivacích nám dává jednoduchý výsledek – časovou neměnnost těchto veličin :

$$\boxed{\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots + \vec{p}_N = konst.}$$

zákon zachování hybnosti

$$\boxed{\vec{B} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 + \ldots + \vec{b}_N = konst}$$

zákon zachování momentu hybnosti

$$\boxed{\vec{p}_o = konst}$$

zákon setrvačnosti (těžiště)

Tyto zákony často umožňují řešení komplikovaných pohybů soustav hmotných bodů, aniž by bylo nutno detailně sledovat chování jednotlivých bodů.

Pozn. : Stav klidové rovnováhy tělesa je zřejmě speciálním případem nalezených zákonů zachování, pro nulovou hodnotu pravých stran.

d) Ekvivalentní soustava sil

Vnější síly působící na nějaké těleso mohou být také podle potřeby nahrazeny **jiným souborem sil** , který ale musí mít na těleso **stejný pohybový účinek** – tj. bude vytvářet stejný **rotační** i **translační** pohyb. Z toho ovšem pak podle impulzových vět plyne, že tato nová soustava sil musí mít ***stejnou výslednici*** a také ***stejný výsledný silový moment*** jako původní vnější síly (vzhledem ke stejnému bodu).

Speciálně potom, při velmi častém **požadavku na maximální zjednodušení** vnějších sil, můžeme jakkoliv početný soubor sil nahradit **jedinou silou** - jejich výslednicí (vektorovým součtem) a můžeme ji umístit v **libovolném místě** – a **jediným silovým momentem** o velikosti rovné výslednému momentu původních sil vzhledem k tomuto požadovanému bodu.

Proto tedy - jestliže za **působiště** jediné výsledné síly zvolíme bod „**rovnováhy tělesa**“ - vůči němuž mají původní síly výsledný moment rovný nule , bude ekvivalentní soustavu sil tvořit **pouze tato jediná výslednice**.

Nalezení takového vztažného bodu je proto nutnou součástí návodu na ***skládání rovnoběžných sil*** , které jste prováděli již na střední škole.

Speciálně v gravitačním poli (Země) je bodem rovnováhy ***těžiště*** tělesa, protože jsme v minulé kapitole odvodili, že součet momentů tíhových sil všech hmotných bodů je vzhledem k němu nulový :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \vec{r}\,'_k \times \vec{G}_k \;=\; 0}$$

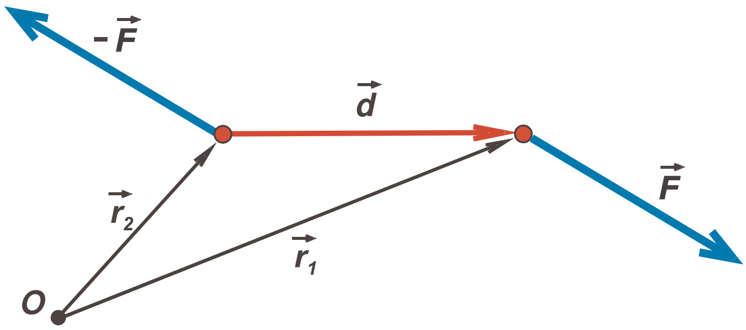
těžiště jako „bod rovnováhy“ gravitačních sil

Výslednice gravitačních sil – ***tíha tělesa*** - má tedy v těžišti **působiště** bez jakéhokoliv přídavného silového momentu.

Při dodržování stejných principů lze samozřejmě provádět také opačný proces - ***rozklad tíhy tělesa*** (například tíhu nějakého nosníku rozložíme na jednotlivé opěrné pilíře).

V konkrétních technických aplikacích ale vztažný bod většinou není možno zvolit, je již určen například skutečnou osou rotace a nemusí to vůbec být rovnovážný bod - pak je ovšem vždy nezbytné připojit k výslednici sil také nenulový silový moment .

K jeho vytvoření se často používá tzv. ***dvojice sil*** , tj. dvě stejně veliké, opačně orientované síly, neležící na stejné přímce (viz obr.).

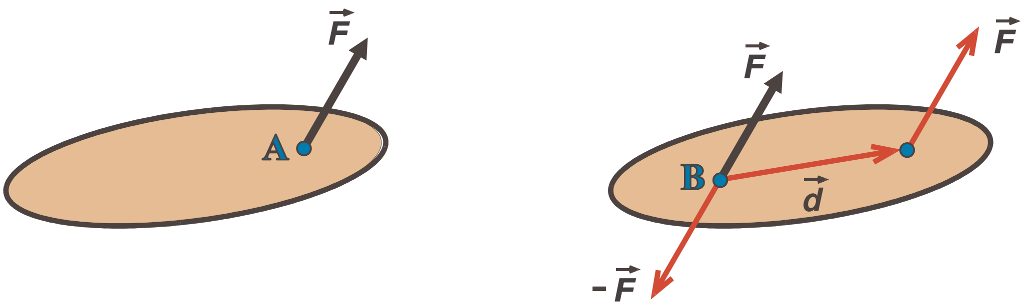


Výhoda je zřejmá – připojením dvojice sil se nezmění výslednice všech sil - a navíc - její silový moment je stejný vůči jakémukoliv bodu prostoru (pokuste se o důkaz) :

$$\boxed{\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}}$$

moment dvojice sil

Tak například i jen **jedinou** na těleso (v místě A) působící sílu můžeme **nahradit jinou silou** – stejně velikou, ale působící v jiném místě B - jde tedy vlastně o **posunutí síly do jiného působiště** , ale musíme **připojit dvojici sil** se stejným momentem jako měla původní síla vzhledem k tomuto novému bodu (viz obr.).



---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 03/2006**

rev. 02/2007