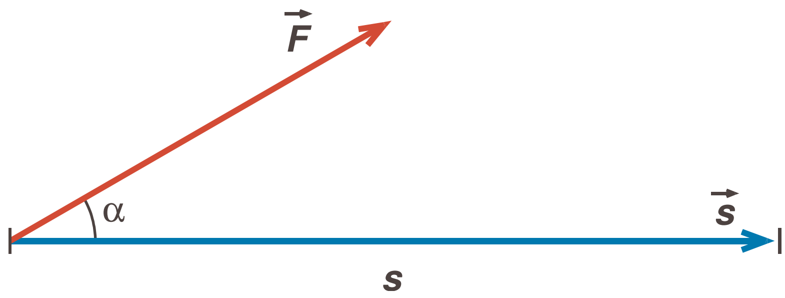
Práce a energie

Pro svoji zásadní důležitost bývá mechanická práce vysvětlována jako jeden z důsledků působení síly na hmotný objekt (hmotný bod) – tzv. ***dráhový účinek síly***.

Ze střední školy znáte základní definici fyzikální veličiny ***mechanické práce*** , kterou vykoná **konstantní** síla F působící na hmotný bod m na **přímé** dráze délky s pod **konstantním** úhlem α (vzhledem k přímce dráhy, viz obr.):

$$\boxed{A = F \cdot s \cdot \cos\alpha}$$

$$[1\ Joule] = [1\ J]$$



Síla je samozřejmě vektor a jestliže definujeme i dráhu jako vektor (je to úsečka, stačí jí přiřadit orientaci, například ve směru pohybu), potom je výše uvedený vztah vlastně skalárním součinem dvou vektorů :

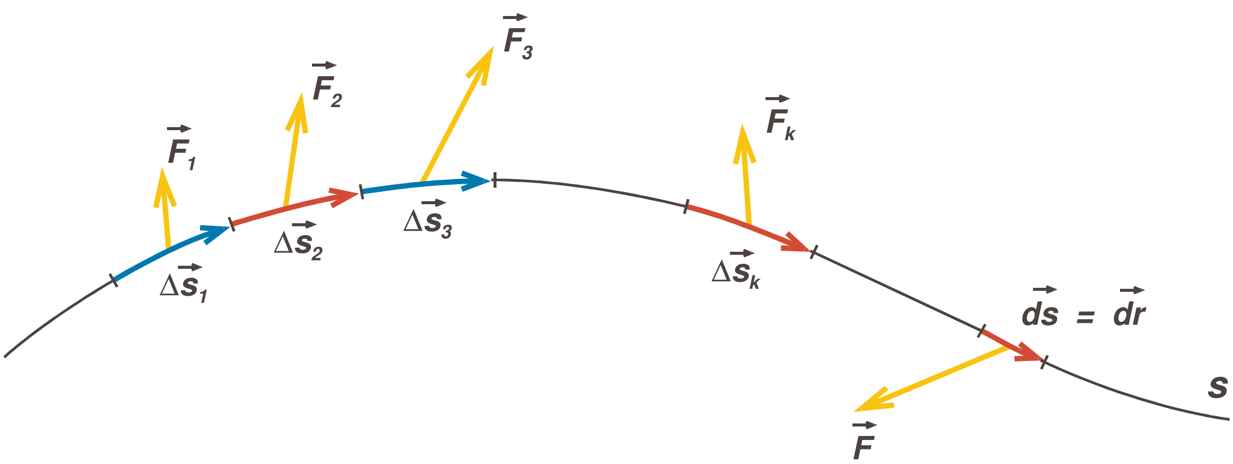
$$\boxed{A = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

mechanická práce

Pro výpočet práce v reálných podmínkách, kdy dráha pohybu je libovolná (spojitá) křivka a působící síla není konstantní, ale libovolná (spojitá) vektorová funkce místa, musíme nyní tento vztah zobecnit :

Křivku dráhy rozdělíme (myšlenkově) na velký počet (N) úseků o velikostech (viz. obr):

$$\Delta s_1, \quad \Delta s_2, \quad \Delta s_3, \quad \Delta s_4, \quad ...., \quad \Delta s_N$$



Z důvodu jejich velkého počtu jsou tyto úseky dráhy nepatrné , proto je lze přibližně považovat za úsečky (přesně to bude platit až v limitě pro jejich nekonečný počet) a přidáním orientace ve směru pohybu z nich můžeme vytvořit **vektory** :

$$\Delta \vec{s}_1, \quad \Delta \vec{s}_2, \quad \Delta \vec{s}_3, \quad \Delta \vec{s}_4, \quad ...., \quad \Delta \vec{s}_N$$

Právě proto, že každý z těchto úseků je **velmi malý** (v limitě pak nekonečně malý), **nemůže** se na něm příliš **měnit** ani velikost síly ani její směr (je to spojitá funkce) - působící sílu na celém úseku je tedy možno považovat za **konstantní** vektor :

$$\vec{F}_1, \quad \vec{F}_2, \quad \vec{F}_3, \quad \vec{F}_4, \quad ...., \quad \vec{F}_N$$

Nyní je ale situace na těchto úsecích dráhy stejná jako v úvodní definici - konstantní síla působí na přímé dráze - a můžeme proto na každém úseku vypočítat vykonanou práci podle základního vztahu :

$$\Delta A_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{s}_1$$

$$\Delta A_2 = \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{s}_2$$

$$\Delta A_3 = \vec{F}_3 \cdot \Delta \vec{s}_3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\Delta A_N = \vec{F}_N \cdot \Delta \vec{s}_N$$

A **celkovou práci** vykonanou na celé dráze s, potom získáme **sečtením** všech těchto jednotlivých (dílčích , elementárních) prací :

$$A \approx \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + ... + \Delta A_N = \sum_{k=1}^{N} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{s}_k$$

Podmínky tohoto výpočtu a tedy i uvedený vzorec platí ovšem tím přesněji , čím menší jsou jednotlivé úseky dráhy, tedy čím větší je jejich počet. Exaktní vztah proto dostaneme až v limitě pro nekonečný počet úseků N.

V tomto případě pak ale nekonečná suma nekonečně malých členů je vlastně matematickou definicí **určitého integrálu** :

$$A = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{s}_k = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Jestliže dále využijeme znalostí z kinematiky, že diferenciální úsek dráhy je roven diferenciálu průvodiče, můžeme také psát :

$$\boxed{A = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

mechanická práce na obecné dráze

Definičním oborem tohoto určitého integrálu je zkoumaná křivka dráhy s, matematicky se tedy jedná o tzv. ***křivkový integrál*** .

Výraz za znakem integrálu je elementární práce , vykonaná na diferenciálním úseku dráhy, a jde vlastně o diferenciální vyjádření jednotlivých členů původní sumy :

$$\boxed{dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

elementární práce

Celková práce vykonaná na dané dráze je tedy integrálem (limitním součtem) elementárních prací.

Dále : Při konání práce v reálné situaci, když například chceme posunout těleso po předepsané dráze, vždy musíme přitom svojí silou překonávat nějaké jiné síly. Tyto síly jsou často důsledkem působení různých **silových polí** na dané těleso (například gravitační pole, elektrické a magnetické pole, pole pružných sil, pole třecích sil, …)
Zabývejme se proto v dalších řádcích především výpočtem práce v „obyčejném“ gravitačním poli naší Země, ve kterém všichni žijeme :

Práce v gravitačním poli, potenciální energie

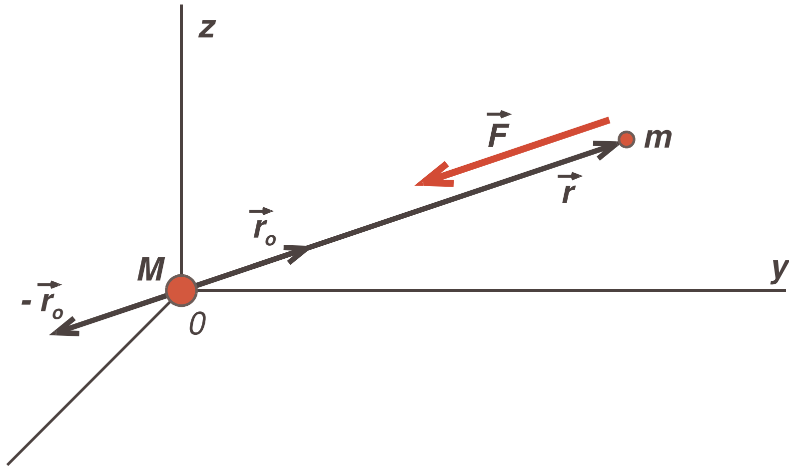
Centrální těleso hmotnosti M (hmotný bod) , umístěné ve vakuu v počátku soustavy souřadnic, působí na druhé, ***zkušební*** těleso hmotnosti m, které je v místě $\vec{r}$, silou :

$$\boxed{\vec{F} = -\kappa \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{r}_o}$$

Newtonův gravitační zákon

kde κ je univerzální ***gravitační konstanta*** a $\vec{r}_o$ je jednotkový vektor průvodiče :

$$\boxed{\kappa = 6{,}67.10^{-11} \; [SI]} \qquad \boxed{\vec{r}_o = \frac{\vec{r}}{r}}$$



Po dosazení jednotkového vektoru dostaneme jiný tvar gravitačního zákona :

$$\vec{F} = -\kappa \cdot \frac{M.m}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Často používaným pojmem je ***intenzita*** gravitačního pole :

$$\boxed{\vec{K} = \frac{\vec{F}}{m} = -\kappa \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{r}_o}$$

Slovní vyjádření : ***Intenzita gravitačního pole je (číselně) rovna síle působící na zkušební těleso jednotkové hmotnosti.***

Je zřejmé, že na povrchu Země $(r = r_z)$ je tato veličina rovna ***gravitační tíhové konstantě*** (zemskému tíhovému zrychlení) :

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\kappa \cdot \frac{M}{r_z^2} \cdot \vec{r}_o}$$

Nebo skalárně :

$$g = \frac{F}{m} = \kappa \cdot \frac{M}{r_z^2} \approx 9{,}80665 \quad m.s^{-2}$$

Nyní pokročme dále a konkrétně vypočítejme práci , kterou vykonáme v gravitačním poli při (velmi pomalém) posunutí tělesa o hmotnosti m (hmotného bodu) po nějaké zadané **dráze** (křivce) s z jejího **počátečního bodu** $\vec{r}_1$ do **koncového bodu** $\vec{r}_2$.

Protože **silové pole** působí na těleso silou $\vec{F}$, musíme **my** (tedy **vnější síla** - vnější vzhledem k danému poli) působit na těleso silou stejně velikou a opačně orientovanou, tj. $-\vec{F}$, abychom sílu pole překonali .

Pozn. : Přesněji vzato, musíme působit ještě malou přídavnou silou navíc pro uvedení tělesa do pohybu, kterou lze ale zřejmě v limitě - při požadavku velmi pomalého posunu - zanedbat.

Základní vztah pro práci vykonanou vnější silou v silovém poli při pohybu tělesa na dráze s proto bude :

$$\boxed{A = \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

práce vnější síly v silovém poli

Je zřejmé, že stejný integrál, ale bez záporného znaménka u síly, by vyjádřil práci silového pole na této dráze :

$$\boxed{A' = \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -A}$$

práce síly pole

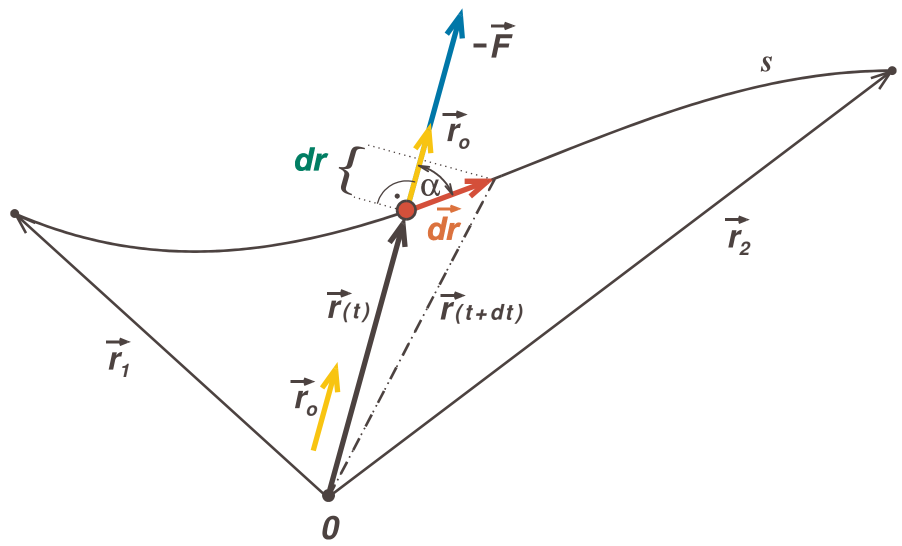
Nyní dosadíme za gravitační sílu a vytkneme konstanty před integrál :

$$A \;=\; \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} -(-\kappa \cdot \frac{Mm}{r^2} \cdot \vec{r}_o\,) \cdot d\vec{r} \;=\; \kappa M m \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} \frac{\vec{r}_o \cdot d\vec{r}}{r^2}$$

Situace při výpočtu práce je znázorněna na obrázku.

Upravíme dále skalární součin v integrálu, přitom využijeme známé velikosti jednotkového vektoru :

$$\vec{r}_o \cdot d\vec{r} \;=\; |\vec{r}_o| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha \;=\; 1 \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha$$



Z obrázku je zřejmé, že skalární součin je **průmětem** diferenciálu průvodiče $d\vec{r}$ do směru průvodiče $\vec{r}$ (do směru jeho jednotkového vektoru) a že je tedy vlastně roven **diferenciálu velikosti průvodiče** dr :

$$\vec{r}_o \cdot d\vec{r} \;=\; |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha \;=\; dr$$

Tím se výrazně zjednoduší výpočet vykonané práce, neboť integrál již neobsahuje vektorové veličiny :

$$A \;=\; \kappa M m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{dr}{r^2} \;=\; \kappa M m \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} \;=\; \kappa M m \,(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}) \;=\; -\frac{\kappa M m}{r_2} \;+\; \frac{\kappa M m}{r_1}$$

Z výsledku vidíme, že vykonaná práce vůbec nezávisí na dráze (na jejím tvaru), ale závisí pouze na počátečním a koncovém bodu dráhy.

Dále si představme, že bychom umožnili **zpětný pohyb** tělesa z koncového bodu do bodu počátečního a již bychom tento pohyb nijak neovlivňovali, tj. nechali bychom **pracovat sílu gravitačního pole** - pak by vykonaná práce byla **stejně veliká** – a my tak svoji původně vykonanou práci „**dostaneme zpět**“ :

$$\int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; A$$

Vnější silou původně vykonaná práce A je tedy jakoby uschována - **zakonzervována** v koncovém bodu dráhy $\vec{r}_2$ a **těleso** (vlastně přesně řečeno **silové pole**) má v tomto místě **schopnost** vykonat **stejně velikou práci** (při návratu do výchozího místa).

Silové pole s takovou význačnou vlastností, která umožňuje zachování, zakonzervování vykonané práce, se nazývá *konzervativní silové pole* .

Tato **schopnost tělesa vykonat práci** , spojená s jeho (koncovou) **polohou** , se nazývá ***potenciální energie*** tělesa (hmotného bodu) a její **velikost** se definuje jako **velikost této práce** , tj. práce vykonané tělesem při přesunu do polohy počáteční.
(Tuto práci spojujeme s daným tělesem, v principu ji ovšem konají síly pole – a rovná se také práci vykonané námi - vnější silou - při původním pohybu z počátečního do koncového bodu).

Protože vykonaná práce nezávisí na tvaru dráhy mezi oběma body, počátečním a koncovým, je potenciální energie **jednoznačnou funkcí místa** $\vec{r}_2$ (tento koncový bod původně zvolené dráhy je ovšem jako obecně **proměnná** veličina ve funkci zcela libovolným bodem v prostoru, píšeme ho tedy obecně dále bez indexu) a samozřejmě je **také funkcí místa** $\vec{r}_1$ (zde je namístě ponechání indexu, neboť tento bod je sice také obecně zcela libovolný, ale při řešení daného problému se předem zvolí a ve funkci dále vystupuje jako konstanta, matematicky to je vlastně **parametr** funkce).

Bodové těleso (hmotný bod) má tedy v daném místě $\vec{r}$ vzhledem k místu $\vec{r}_1$ potenciální energii :

$$\boxed{W_p(\vec{r},\vec{r}_1) = -\frac{\kappa M m}{r} + \frac{\kappa M m}{r_1}}$$

gravitační potenciální energie (obecný tvar)

Kvůli zásadnímu významu této veličiny zopakujme znovu : ***gravitační potenciální energie je definována jako práce, kterou vykoná gravitační pole při pohybu tělesa z daného místa*** $\vec{r}$ ***do zvoleného výchozího místa*** $\vec{r}_1$ (a je také rovna práci , kterou musí nejprve vykonat vnější síla při přesunu tělesa opačným směrem - z výchozího místa do daného místa).

Poznámka : Ze střední školy si jistě pamatujete jednoduchý vzorec pro potenciální energii :

$$\boxed{W_p = mgh}$$

Není tento vztah v rozporu s naším posledním vzorcem?
Ukažte si na cvičení, že nikoliv, a že jde pouze o jeho limitní tvar.

A dále - zejména v teoretických výpočtech se pro potenciální energii většinou volí výchozí místo v **nekonečnu** , tj. matematicky zapsáno :

$r_1 \rightarrow \infty$

V této limitě je potom ve vztahu pro potenciální energii druhý člen nulový - zbavíme se tak závislosti na počátečním stavu tělesa (na jeho počáteční poloze) a dostáváme velmi jednoduchý tvar :

$$\boxed{W_p(\vec{r}\,) = -\frac{\kappa M\, m}{r}}$$

gravitační potenciální energie (speciální tvar)

Stanovme opět význam : ***je to práce, kterou vykoná gravitační pole při pohybu tělesa z daného místa $\vec{r}$ do nekonečna*** (a je také rovna práci, kterou musí nejprve vykonat vnější síla při přesunu tělesa opačným směrem - z nekonečna do daného místa).

S využitím posledního vztahu můžeme nyní snadno zapsat **původní vykonanou práci** (vnější silou) při přesunu tělesa mezi dvěma místy :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\frac{\kappa M\, m}{r_2} + \frac{\kappa M\, m}{r_1} = W_p(\vec{r}_2\,) - W_p(\vec{r}_1\,) = W_{p2} - W_{p1}$$

Práce potřebná pro přemístění tělesa mezi dvěma místy je tedy rovna **rozdílu potenciálních energií** mezi těmito místy. (Formálně stejný vztah platí při jakékoliv volbě výchozího místa $\vec{r}_1$, dokažte sami.)

Často používanou veličinou v gravitačním poli je také :

$$\boxed{\varphi(\vec{r}\,) = \frac{W_p}{m}}$$

gravitační potenciál

Význam gravitačního potenciálu je opět velmi názorný : ***Je to potenciální energie tělesa jednotkové hmotnosti - tedy práce gravitačního pole potřebná k přenesení tělesa jednotkové hmotnosti z daného místa do nekonečna.***

Pak lze zapsat vykonanou práci také pomocí rozdílu potenciálů mezi dvěma místy :

$$A = W_{p2} - W_{p1} = m\cdot(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Porovnejte příští semestr tento gravitační potenciál s potenciálem elektrostatickým, který je kvůli jeho častému používání v elektrotechnice samozřejmě daleko známější fyzikální veličinou.

Dále zavedeme pojem kinetické energie.

Kinetická energie

Nyní si budeme všímat změny pohybového stavu hmotného bodu, spojené s konáním práce mezi dvěma místy dráhy. Nejprve upravíme pohybovou rovnici :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Abychom dostali vztah pro elementární práci, vynásobíme rovnici skalárně diferenciálem průvodiče:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\,d\vec{v}\cdot\vec{v}$$

K úpravě vzniklého skalárního součinu na pravé straně použijeme vztah pro velikost vektoru :

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$$

Tuto rovnici derivujeme podle času, nebo jednodušeji diferencujeme :

$$2v\,dv = d\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot d\vec{v} = 2\,d\vec{v}\cdot\vec{v}$$

Dostaneme :

$$v\,dv = \vec{v}\cdot d\vec{v}$$

Což dosadíme do vztahu pro elementární práci :

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = m\,d\vec{v}\cdot\vec{v} = m\,v\,dv$$

Aby bylo možno jednoznačně stanovit souvislost s veličinami předchozího odstavce, budeme dále předpokládat, že práce se opět koná v **silovém poli gravitační síly** $\vec{F}$.

Výše uvedenou elementární práci na diferenciální dráze $d\vec{r}$ nechť tedy koná síla gravitačního pole a z rovnice (z její pravé strany) vidíme, že důsledkem je vznik diferenciálu, tj. přírůstku rychlosti hmotného bodu.

Konání práce silovým polem má tedy za následek zvyšování rychlosti tělesa (představte si například volný pád v gravitačním poli Země).

Předpokládejme konkrétně , že konáním práce působící silou pole $\vec{F}$ na nějaké dráze mezi počátečním bodem $\vec{r}_1$ a koncovým bodem $\vec{r}_2$ se zvýší rychlost tělesa (hmotného bodu) z hodnoty $\vec{v}_1$ na $\vec{v}_2$. Vykonaná práce tedy bude (její označení je ve shodě s označením práce gravitačního pole v předchozím odstavci o potenciální energii) :

$$A' = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Po dosazení za elementární práci můžeme lehce provést výpočet určitého integrálu :

$$A' = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m\,v\,dv = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = m\left[\frac{1}{2}v^2\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Vidíme, že stejně jako u potenciální energie, ani tato práce **nezávisí na tvaru dráhy** , dokonce ani **nezávisí na poloze** počátečního a koncového bodu dráhy - důležitý je pouze **počáteční a koncový pohybový stav** tělesa (počáteční a konečná rychlost).

Můžeme konstatovat, že vykonaná práce je opět uskladněna, **zakonzervována** , tentokrát ovšem v **pohybovém stavu** tělesa – a to má tedy v tomto stavu opět schopnost vykonat stejně velikou práci (při návratu do původního pohybového stavu, tj. při zabrzdění tělesa).

Tato **schopnost tělesa vykonat práci** , spojená s jeho **pohybovým stavem** se pak nazývá ***kinetická energie*** tělesa. Abychom, stejně jako u potenciální energie, vyloučili závislost na počátečním stavu tělesa (nyní pohybovém), předpokládejme počáteční nulovou rychlost ($v_1 = 0$). Potom je druhý člen na pravé straně roven nule a kinetická energie je tedy definována jednoduchým vztahem :

$$\boxed{W_k(v) = \frac{1}{2} m v^2}$$

kinetická energie (hmotného bodu)

Kvůli zásadnímu významu této veličiny opět zopakujme : ***Kinetická energie je definována jako práce, kterou těleso (hmotný bod) hmotnosti m vykoná, když bude zabrzděno z rychlosti v do klidového stavu*** (a kterou nějaká působící síla, například silové pole, musí nejprve vykonat při uvedení tělesa z klidu do pohybu touto rychlostí v).

Pozn. : Nyní, při znalosti kinetické energie, už jistě rozumíme požadavku na velmi pomalé posouvání tělesa na dráze při definici energie potenciální.

S využitím veličiny kinetické energie pak také můžeme přepsat vztah pro **práci působící síly** (silového pole) do tvaru :

$$A' = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_2^{\,2} - \frac{1}{2} m v_1^{\,2} = W_k(v_2) - W_k(v_1) = W_{k2} - W_{k1}$$

Práce potřebná pro přemístění tělesa mezi dvěma místy (působící silou - silovým polem) je tedy rovna **rozdílu kinetických energií** mezi těmito místy.

Z předchozího odstavce ale také víme, že práci při přemístění tělesa lze rovněž vyjádřit **rozdílem potenciálních energií** mezi těmito místy ….. až nyní tedy vlastně matematicky uplatníme předpoklad, že těleso se pohybuje v silovém (gravitačním) poli :

$$A' = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{k2} - W_{k1} = -A = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{p1} - W_{p2}$$

Dostáváme tak vztah pro potenciální a kinetické energie hmotného bodu v počátečním a koncovém bodu dráhy :

$$W_{k2} - W_{k1} = W_{p1} - W_{p2}$$

Po přeskupení členů vznikne velmi zásadní rovnice pro součet obou energií v těchto bodech :

$$W_{p1} + W_{k1} = W_{p2} + W_{k2}$$

Počáteční a koncové body dráhy, stejně jako dráha sama, jsou ovšem v prostoru (v silovém poli) obecně zcela libovolné , potom tedy můžeme konstatovat, že :

Součet potenciální a kinetické energie má v jakémkoliv místě konzervativního silového pole stále stejnou hodnotu .

Tento součet se nazývá ***celková mechanická energie*** a dospěli jsme tak k velmi důležitému zákonu mechaniky :

$$\boxed{W = W_p + W_k = konst.}$$

zákon zachování celkové mechanické energie

Uvedený zákon byl odvozen pro **hmotný bod** , platí ovšem i pro všechny **hmotné objekty** (které jsou vlastně z hmotných bodů – atomů - složeny).

Jediným předpokladem zákona zachování energie je konzervativní silové pole.

Kromě gravitačního pole je konzervativní také pole **elektrostatické** a pole **pružných sil** , výpočty v těchto polích jsou tak díky platnosti zákona zachování mechanické energie velmi pohodlné.

Konzervativnost bohužel nejeví například pole **magnetické** a pole **třecích** sil.

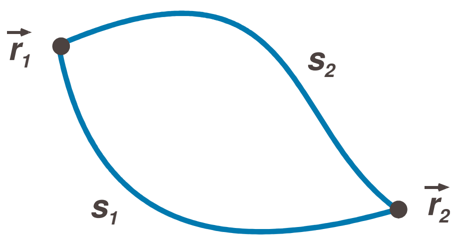
Důležitost konzervativnosti silového pole podtrhuje ještě následující krátký odstavec .

Další vlastnosti konzervativního pole

Víme už, že v takovém silovém poli nezávisí vykonaná práce při přesunu tělesa z místa $\vec{r}_1$ do místa $\vec{r}_2$ na tvaru dráhy. Jestliže tedy zvolíme **dvě různé dráhy** (křivky) s_1 a s_2 spojující oba body (viz obr.), pak musí být práce na těchto drahách naprosto stejné :

$$\boxed{\int_{\vec{r}_1(s_1)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; \int_{\vec{r}_1(s_2)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

<u>nezávislost práce na dráze</u>



U pravého integrálu pak přehodíme meze - tím změní znaménko - a převedeme ho na levou stranu :

$$\int_{\vec{r}_1(s_1)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \;+\; \int_{\vec{r}_2(s_2)}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; 0$$

Nyní lze oba integrály na levé straně rovnice <u>sečíst</u> (spojit) do <u>jediného integrálu</u> po <u>výsledné</u> křivce, složené z obou jednotlivých křivek $s = s_1 + s_2$ (jde o tzv. **<u>uzavřenou křivku</u>** a integrál má speciální označení) :

$$\boxed{\oint_{s=s_1+s_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; 0}$$

<u>integrál po uzavření křivce s</u>

Protože obě původní křivky byly <u>libovolné</u> a spojovaly <u>libovolné</u> dva body, platí integrál pro **<u>jakoukoliv</u>** uzavřenou křivku v prostoru silového pole a nepíšeme proto žádné označení této křivky :

$$\boxed{\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; 0}$$

<u>celková práce na libovolné uzavřené dráze</u> (je nulová)

<u>Slovní vyjádření :</u> ***Celková vykonaná práce na uzavřené dráze*** (při oběhu uzavřené křivky, tj. při návratu do výchozího místa) ***je nulová.***

<u>Pozn. :</u> Přitom samozřejmě na některých částech dráhy je vykonaná práce <u>kladná</u> a na jiných částech dráhy je <u>záporná</u>)

Tento vztah po mnoho staletí <u>velmi znesnadňoval</u> nadšeným vynálezcům konstrukci mechanického věčně pracujícího stroje - ***<u>perpertua mobile</u>*** (1. druhu).

V konzervativním elektrostatickém poli je výše uvedený vztah základem ***Kirchhofova zákona*** o oběhu uzavřené smyčky elektrického obvodu (součet napětí zdrojů a úbytků napětí na odporech je nulový – neboť všechno to jsou práce v elektrickém poli, kladné či záporné).
V termodynamice mají podobnou vlastnost ***stavové veličiny*** (to jsou stavové proměnné jako tlak, objem, teplota, ale jde hlavně o stavové funkce jako je vnitřní energie, entropie, entalpie, volná energie, atd., obecně ***termodynamické potenciály***), uzavřenou křivkou zde ovšem není skutečná dráha v prostoru, ale stejně geometricky uzavřená křivka ***kruhového děje*** v grafu stavových proměnných (například v pV-diagramu).

V příštím semestru (FYA2) si ještě ukážeme **další vztahy** , ve tvaru diferenciálních operátorových rovnic pro intenzitu a potenciál elektrostatického pole, které jsou ekvivalentní výše uvedeným integrálním vztahům :

$$\boxed{\vec{E} = -\,grad\,\varphi}$$

$$\boxed{rot\,\vec{E} = 0}$$

V našem gravitačním poli pak platí analogické rovnice pro gravitační intenzitu (nebo sílu) :

$$\boxed{\vec{K} = -\,grad\,\varphi}$$

$$\boxed{rot\,\vec{K} = 0}$$

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 02/2006**

rev. 02/2007