Dynamika hmotného bodu

Dynamika zkoumá pohyb (hmotného bodu a reálných těles) v souvislosti s jeho příčinami – silami, které mají původ ve vzájemném působení mezi hmotnými objekty.

Základem dynamiky a vlastně celé klasické mechaniky jsou ***Newtonovy zákony*** (1687):

1) *Zákon setrvačnosti*

> Těleso setrvává v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém, pokud není nuceno působením okolních těles tento svůj stav změnit

Tato jednoduchá věta obsahuje závažná a principiální tvrzení :

- Konstatování **klidu nebo pohybu** rovnoměrného přímočarého je vlastně výsledkem hodnocení rychlosti tělesa, která – jak víme – musí být stanovena pomocí polohového vektoru, definovaného v nějaké soustavě souřadnic. Pojem klidu nebo pohybu tak závisí na **volbě** soustavy souřadnic – je tedy ***relativní***. Z hlediska zákona setrvačnosti jsou pak klid a pohyb rovnoměrný přímočarý zcela **ekvivalentní** - což je v dobrém souladu s tím, že oba tyto stavy jsou vlastně popsány **konstantním vektorem rychlosti** (v klidu nulovým)

- Protože platí princip skládání pohybů (blíže viz další kapitola), je zřejmé, že kdyby konstatování takového pohybu nebo klidu nějakého tělesa platilo současně ve dvou vztažných soustavách, tj. v obou soustavách by těleso mělo konstantní vektor rychlosti, pak by vzájemný pohyb soustav musel být také popsán konstantním vektorem rychlosti – byl by to tedy také rovnoměrný přímočarý pohyb. **Takové soustavy souřadnic** , kdy se jedna vůči druhé pohybuje **rovnoměrným přímočarým** pohybem , se nazývají ***inerciální*** a zákon setrvačnosti vlastně také tvrdí, že tyto soustavy **existují** .

- **Působení jiného tělesa** (okolního) na těleso sledované – to je vlastně obecná ***definice síly*** .

- Je proto možno konstatovat, že v **klidu** nebo v pohybu **rovnoměrném přímočarém** nepůsobí na těleso **žádná síla** (tedy **nulová síla** – tomu je ale matematicky ekvivalentní stav, kdy na těleso působí více sil , ale mají **nulovou výslednici** - jejich účinky se pak navzájem vyrovnávají, je to tzv. „ rovnovážný stav tělesa“)

- Jakmile začne síla (okolní tělesa) působit, nastane **změna stavu** (pohybového = dynamického) tělesa - a to je tedy **výsledek působení síly** (doposud konstantní vektor rychlosti tělesa se začne měnit - tím vznikne nenulové zrychlení – o jeho velikosti pak pojednává následující zákon síly).

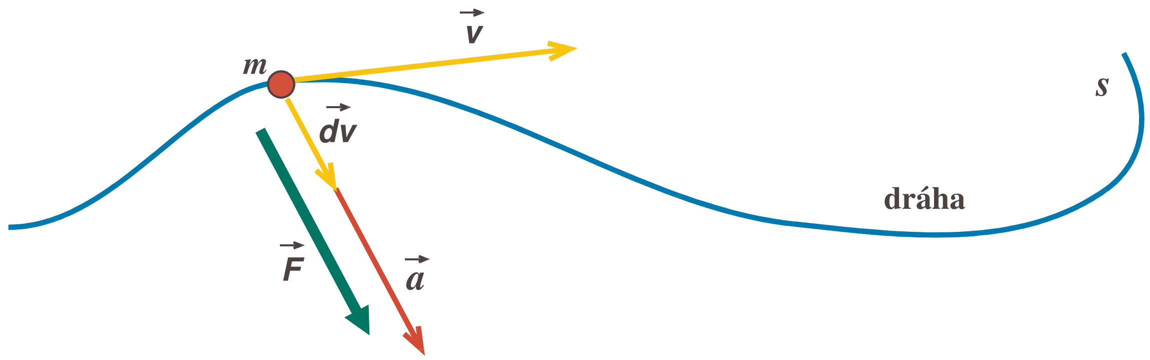
Newton se domníval, že existuje nějaká význačná, základní inerciální vztažná soustava souřadnic – ***absolutní prostor*** , který je základní podmínkou, předpokladem všech (mechanických) dějů. Newton také předpokládal existenci ***absolutního času*** , stejně rovnomětně plynoucího ve všech soustavách.

2) Zákon síly (pohybová rovnice)

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

Slovní vyjádření : ***Okamžité zrychlení tělesa je přímo úměrné působící síle*** *(a nepřímo úměrné setrvačné hmotnosti tělesa).*

Protože se jedná o úměru vektorových veličin, znamená tento vztah nejen skutečnou přímou úměru velikosti zrychlení a velikosti působící síly, ale také **stejný směr a orientaci** těchto veličin (viz obr.).



Při působení síly tedy těleso (hmotný bod) v souladu s prvním zákonem změní svůj pohybový stav – z pohybu rovnoměrného přímočarého na **pohyb zrychlený**. Protože velikost a směr působící síly mohou být obecně jakékoliv – bude takové i odpovídající zrychlení pohybu. Libovolná bude tedy i změna rychlosti v daném místě dráhy, což znamená nejen změnu velikosti rychlosti ale i změnu jejího směru – tj. změnu tečny dráhy. Působící síla proto může vytvořit jakýkoliv **nerovnoměrný křivočarý** pohyb.

Pozn. : Z minulé kapitoly víme, že se mechanické pohyby jednoduše skládají (sčítají se jako vektory), proto se stejně jednoduše také **skládají síly** – jednoznační původci těchto pohybů.

Pohybová rovnice je rovnicí ***vektorovou*** , tj. je to formální matematický vztah, který se při konkrétním výpočtu musí rozepsat do vektorových souřadnic:

$$F_x = m \cdot a_x = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$F_y = m \cdot a_y = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$F_z = m \cdot a_z = m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Nebo zjednodušeně pomocí formálního zápisu derivací :

$$\boxed{\begin{aligned} m\cdot\ddot{x} &= F_x \\ m\cdot\ddot{y} &= F_y \\ m\cdot\ddot{z} &= F_z \end{aligned}}$$

pohybové rovnice

Dostáváme tedy tři skalární rovnice. Jsou to ***parciální diferenciální rovnice 2. řádu*** s nenulovou pravou stranou. Pro jejich řešení je nutno zadat působící sílu (souřadnice) a hmotnost tělesa.
Výsledkem jejich řešení pak budou souřadnice průvodiče jako funkce času , tedy vlastně parametrické rovnice dráhy hmotného bodu :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}}$$

parametrické rovnice

Z nich - jak víme z minulé kapitoly – je pak možno stanovit **všechny kinematické veličiny** pohybu hmotného bodu. Sestavení a vyřešení pohybových rovnic je proto **základním úkolem dynamiky** .

Konkrétní řešení výše uvedených diferenciálních rovnic závisí samozřejmě na matematickém tvaru pravých stran – tj. na působící síle - a může být **velmi komplikované** (stačí si představit např. obyčejnou brzdící sílu, která je v různých případech (vzájemné tření dvou pevných těles, tření pevného tělesa s kapalinou, s plynem) úměrná různým mocninám rychlosti).

Jako **jednoduchou aplikaci** si v následujících řádcích ukážeme řešení pohybových rovnic v případě **konstantní síly** působící ve směru pohybu hmotného bodu :

Konstantní velikost a neměnný směr a má pak podle pohybové rovnice také zrychlení i změna rychlosti hmotného bodu – vzniká proto **přímočarý, rovnoměrně zrychlený pohyb** . Jestliže položíme přímku dráhy s například do osy x , můžeme vektory síly a průvodiče zapsat následovně :

$$\vec{F} = (F_x, 0, 0) = (F, 0, 0)$$

$$\vec{r} = (x, 0, 0) = (s, 0, 0)$$

Stejný směr osy x mají potom i vektory rychlosti a zrychlení :

$$\vec{v} = (v_x, 0, 0) = (v, 0, 0)$$

$$\vec{a} = (a_x, 0, 0) = (a, 0, 0)$$

A ze tří pohybových rovnic je nenulová pouze jediná, pro x-ové souřadnice :

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} = F_x}$$

Pomocí výše uvedeného zápisu souřadnic můžeme obě strany této rovnice napsat :

$$m \cdot \ddot{x} = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = F_x = F$$

V tomto **nejjednodušším** možném případě, kdy pohybová rovnice neobsahuje **žádné další derivace** souřadnic, můžeme provést její vyřešení **postupnou přímou integrací** : z rovnice lze totiž ihned stanovit konkrétní velikost zrychlení :

$$a = \frac{F}{m} = konst.$$

A protože zrychlení je derivace rychlosti :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Můžeme zpětně přejít k rychlosti obráceným postupem – pomocí **neurčitého integrálu** (tzv. primitivní funkce, nezapomeneme přitom přičíst možnou konstantu) :

$$v = \int a + C_1$$

Protože zrychlení je konstantní, můžeme ho z integrálu vytknout a zbylý integrál z jedničky je roven proměnné (tj. času) v první mocnině :

$$v = \int a + C_1 = a \cdot \int 1 + C_1 = a \cdot t + C_1$$

Tento vztah pro rychlost hmotného bodu (při přímočarém, rovnoměrně zrychleném pohybu) platí zcela obecně – jeho **integrační konstanta** pak umožňuje „přizpůsobit“, specifikovat tuto rychlost pro jakékoliv konkrétní podmínky pohybu - tzv. **okrajové podmínky** řešené úlohy :

Nejčastěji se používají **počáteční podmínky** pohybu, kdy stanovíme pro počátek sledované dráhy konkrétní hodnoty všech proměnných veličin :

- **počáteční čas** t_o (většinou volíme nulový , tj. $t = 0$, což je výhodné, ale není to nezbytné)
- **počáteční rychlost** hmotného bodu v_o , tj. rychlost v počátečním čase : $v_o = v(t_o)$
- **počáteční dráhu** hmotného bodu s_o , tj. dráhu v počátečním čase . $s_o = s(t_o)$

Pozn. : Je zřejmé, že takto může být zadáno i jakékoliv jiné místo dráhy a že v obecném trojrozměrném případu půjde o stanovení vektoru rychlosti a průvodiče tohoto místa dráhy.

Integrační konstantu pak určíme tím způsobem, že počáteční podmínky (použijme nulový počáteční čas) dosadíme do obecného vztahu :

$$v_o = a \cdot 0 + C_1$$

Dostáváme ihned :

$$C_1 = v_o$$

A vzniká nám tak známý středoškolský vztah pro rychlost rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu :

$$\boxed{v = a \cdot t + v_o}$$

rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu

Pozn. : Naše pohybová rovnice je vhodná i pro ukázku řešení diferenciálních rovnic **metodou separace proměnných** (oddělení proměnných veličin) :

Použijeme výchozí vztah pro zrychlení jako derivaci času :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Rovnici vynásobíme diferenciálem času (a případně přehodíme strany) :

$$dv = a \cdot dt$$

Tím jsme dosáhli stavu, že na levé straně rovnice je pouze funkce (závisle) proměnné – rychlosti v a na druhé straně je pouze funkce (nezávisle) proměnné – času t, přičemž levá strana (a tedy i jí rovná strana pravá) má fyzikální význam **diferenciálního přírůstku** (velikosti) rychlosti za čas (časový interval) dt.

Vždy, když u diferenciální rovnice dokážeme oddělit proměnné veličiny, pokračujeme v řešení tak, že uděláme **určitý integrál** levé i pravé strany. Z matematické analýzy byste měli vědět, že tento matematický úkon vytvoří v definovaných mezích (limitní) součet integrované veličiny – na levé i pravé straně rovnice – a rovnost zůstane zachována, přitom v našem případě má výsledek i jasný význam : když integrujeme – sčítáme – (diferenciální) přírůstky rychlosti, dostaneme **celkový přírůstek** rychlosti (na nějakém úseku dráhy hmotného bodu).

Právě separace proměnných pak umožňuje, aby každý integrál - na levé i pravé straně rovnice - měl pouze **jedinou integrační proměnnou** a aby v této proměnné byl také vyjádřen **integrační obor** – tj. uvažovaný úsek dráhy hmotného bodu.

Nezanedbatelnou **výhodou** této metody je také to, že když se při definování **integračních mezí** použijí okrajové podmínky pohybu, ihned se tím „automaticky“ stanoví i integrační konstanty :

Konkrétně v našem případě je na pravé straně integrační proměnnou čas - uvážíme tedy, že se při pohybu hmotného bodu na sledovaném úseku dráhy bude měnit od počátečního času t_o (to bude **dolní mez** integrálu, v našem případě nula) do nějakého konečného času t (**horní mez** integrálu), který považujeme za libovolný, obecný, a proto k němu nepíšeme žádný index (vzniká tím sice formální chyba - že je konkrétní hodnota horní meze integrálu označena stejně jako integrační proměnná – správněji bychom tedy měli horní mez nazvat např. t_1 a teprve na závěr v diskusi prohlásit, že ji považujeme za libovolnou veličinu a proto ji přeznačíme na t - ale tímto zkráceným postupem zrychlíme náš výpočet.)

Na levé straně pak je integrační proměnnou rychlost hmotného bodu, která se bude měnit od počáteční hodnoty v_o do konečné rychlosti v (a děláme stejnou formální chybu v označení horní meze, ale opět tím šetříme čas) :

$$\int_{v_o}^{v} dv = \int_{0}^{t} a \cdot dt$$

Jak známo, k výpočtu určitého integrálu také potřebujeme primitivní funkci (tj. neurčitý integrál integrované veličiny), do které postupně dosadíme horní a dolní mez integrační proměnné a výsledky odečteme – což se formálně zapisuje jako :

$$[\, v \,]_{v_o}^{v} = a \cdot [\, t \,]_0^t$$

Po dosazení na obou stranách potom dostaneme :

$$v - v_o = a \cdot (t - 0)$$

Nakonec tedy vzniká stejná rovnice, jako u přímé integrace :

$$\boxed{v = a \cdot t + v_o}$$

Dále pokračujeme analogickým způsobem :

Protože nyní již známe rychlost pohybu a je to derivace dráhy podle času :

$$v = \frac{ds}{dt} = a \cdot t + v_o$$

Můžeme dráhu vypočítat jako integrál této rychlosti (opět neurčitý integrál a další integrační konstanta) :

$$s = \int v + C_2 = \int (a \cdot t + v_o) + C_2$$

Integrál součtu je součet integrálů a integrované funkce jsou velmi jednoduché :

$$s = \int (a \cdot t + v_o) + C_2 = \int a \cdot t + \int v_o + C_2 = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_o \cdot t + C_2$$

Integrační konstantu pak opět stanovíme tím způsobem, že do vzniklého obecného vztahu dosadíme okrajové podmínky (v našem případě dosadíme počáteční dráhu v počátečním čase – nulovém) :

$$s_o = \frac{1}{2} a \cdot 0^2 + v_o \cdot 0 + C_2$$

Řešením je :

$$C_2 = s_o$$

A dostáváme vztah pro dráhu rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu :

$$\boxed{s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_o \cdot t + s_o}$$

dráha rovnoměrně zrychleného pohybu

Pozn. : Opět lze použít metodu separace proměnných : napíšeme výchozí vztah pro rychlost jako derivaci dráhy :

$$\frac{ds}{dt} = a \cdot t + v_o$$

Rovnici vynásobíme diferenciálem času :

$$ds = (a \cdot t + v_o) \cdot dt$$

A tím jsme opět dosáhli stavu, že na levé straně rovnice je pouze funkce (závisle) proměnné – dráhy s a na druhé straně je pouze funkce (nezávisle) proměnné – času t, přičemž obě strany rovnice mají smysl – tentokrát diferenciálního přírůstku dráhy za čas dt.

Dále opět uděláme určitý integrál obou stran – na každé straně tak dostaneme celkovou délku uběhnuté dráhy a rovnost se nezmění. Integrační konstantu opět vytvoříme při stanovení integračních mezí :

Na pravé straně je integrační proměnná čas a bude se měnit od nuly do libovolné hodnoty t, na levé straně pak je integrační proměnnou dráha , která bude narůstat od počáteční hodnoty s_o do konečné velikosti s :

$$\int_{s_o}^{s} ds = \int_{0}^{t} (a \cdot t + v_o) \cdot dt$$

Meze integrálů opět dosazujeme do primitivních funkcí

$$[s]_{s_o}^{s} = \left[\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_o \cdot t \right]_0^t$$

Dostaneme :

$$s - s_o = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_o \cdot t - (\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot 0^2 + v_o \cdot 0)$$

A vzniká samozřejmě stejná rovnice jako přímou integrací :

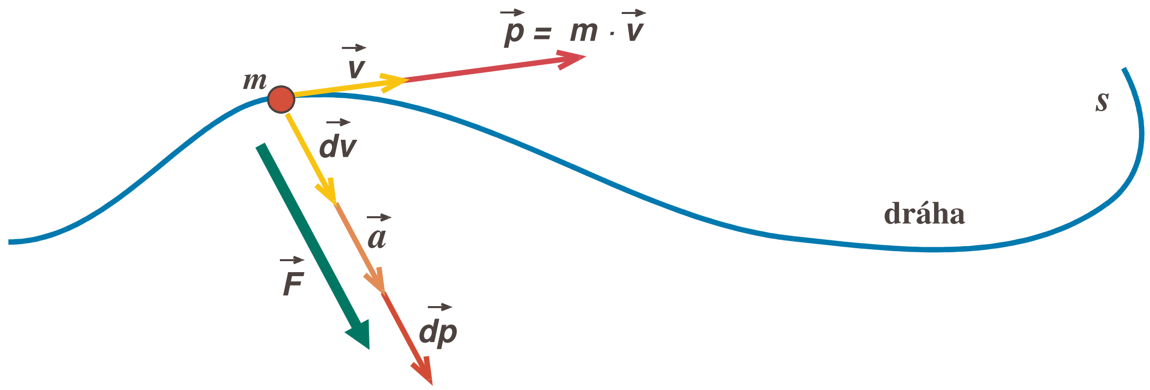
$$\boxed{s = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_o \cdot t + s_o}$$

Pohybové rovnice budete také probírat na cvičení a s některými dalšími standardními způsoby řešení diferenciálních rovnic se ještě seznámíte koncem semestru v tématu „Kmity a vlnění“.

Nyní dále pokročíme ve výkladu druhého Newtonova zákona : Často je výhodné místo rychlosti používat obecnější veličinu, která závisí i na hmotnosti a která tedy „kompletněji" popisuje pohybový stav tělesa (hmotného bodu) :

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$

hybnost (hmotného bodu)



Pro časovou změnu této veličiny platí (rovnici derivujeme) :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

Protože jsme tím dostali pravou stranu pohybové rovnice – je zřejmé, že s využitím vektoru hybnosti můžeme tedy napsat ***zákon síly*** ve formálně jednodušším tvaru :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

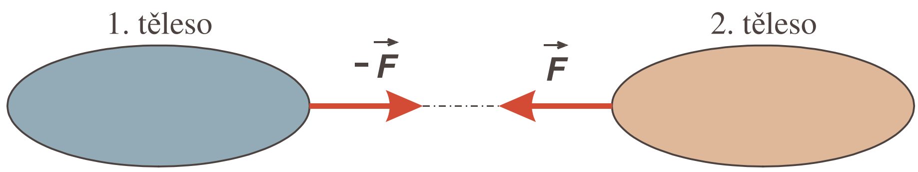
zákon síly *(druhý tvar)*

Slovní vyjádření : ***časová změna hybnosti je rovna*** *(je úměrná)* ***působící síle*** .

Je to i původní Newtonova formulace 2. zákona a je velmi pozoruhodné, že tento tvar pohybové rovnice **platí** i ve speciální teorii relativity (na rozdíl od předchozího „technického" tvaru pohybové rovnice, používajícího veličinu zrychlení).

3) *Zákon akce a reakce*

Jestliže jedno těleso působí na druhé těleso nějakou silou ($\vec{F}$) , pak také současně působí druhé těleso na první těleso silou stejně velikou, ale opačně orientovanou ($-\vec{F}$).



Tento zákon nám např. vysvětluje, proč těleso na podložce nemění svůj pohybový stav (zůstane v klidu), i když na něj působí gravitační síla.. Obecně ovšem nezáleží na tom, jestli jsou tělesa v „dotyku“, nebo na sebe působí „na dálku“.

Zásadní důležitosti pak nabývá tento zákon při popisu soustav hmotných bodů a reálných těles (řeší problém vnitřních sil).

Uveďme dále pro ilustraci několik ***praktických a zajímavých sil*** :

1) Tíha tělesa

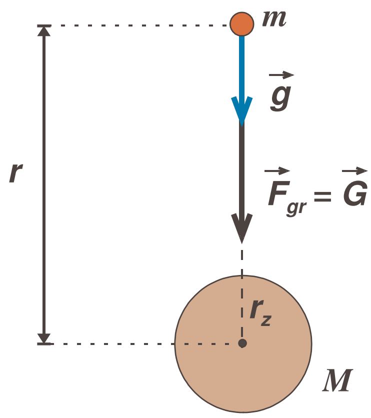
Se znalostí pohybové rovnice:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

nyní dobře chápeme název ***zemské tíhové zrychlení*** pro gravitační tíhovou konstantu g, a i možnost vektorového zápisu tíhové síly tělesa :

$$\boxed{\vec{G} = m \cdot \vec{g}}$$

tíha tělesa



Přitažlivá síla Země musí ovšem splňovat gravitační zákon (uveďme zatím jen známý skalární tvar, vektorově později) :

$$G = F_{gr} = \kappa \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \kappa \cdot \frac{M}{r^2}$$

Porovnáním s předchozím vztahem pro tíhu dostaneme vztah pro zemské tíhové zrychlení a můžeme také vypočítat jeho velikost na povrchu Země, když dosadíme hodnoty gravitační konstanty, hmotnosti a poloměru Země :

$$g = \kappa \cdot \frac{M}{r^2} = \kappa \cdot \frac{M}{r_z^2} \approx 9{,}81\, m/s^2$$

2) ***Dostředivá síla***

Víme již, že celkové zrychlení hmotného bodu lze vyjádřit pomocí tečné a dostředivé složky :

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Když tento vztah dosadíme do pohybové rovnice :

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a} = m\cdot(\vec{a}_\tau + \vec{a}_n) = m\cdot\vec{a}_\tau + m\cdot\vec{a}_n = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$$

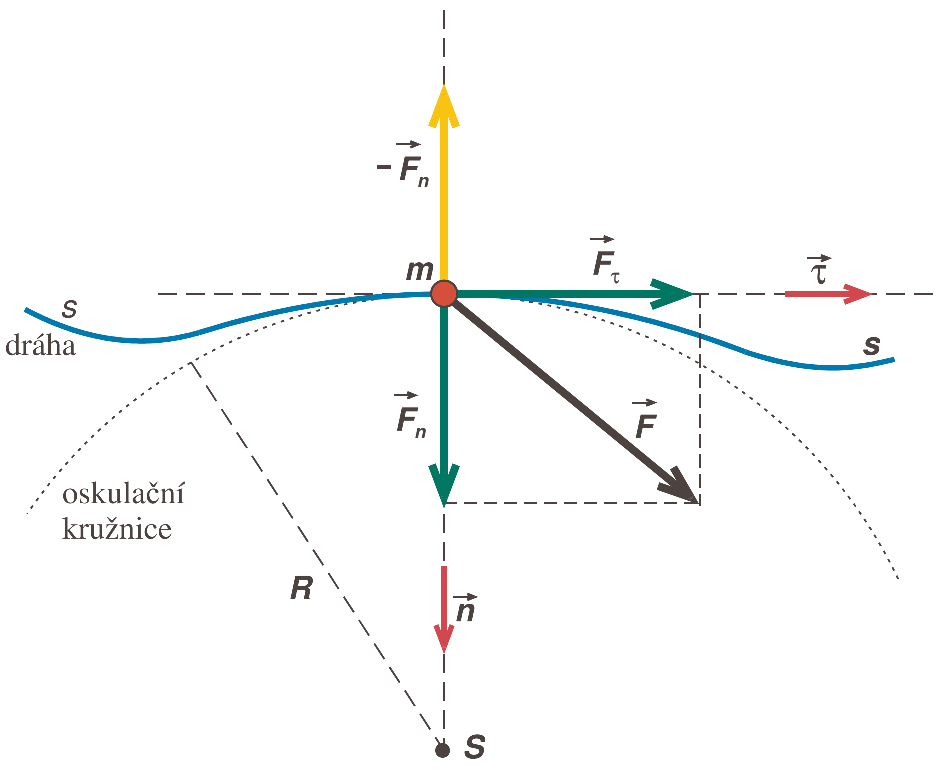
Vzniknou také **dvě složky síly** , složka (síla) ***tečná*** a ***normálová*** (nebo také ***dostředivá***, protože směřuje do středu křivosti dráhy). Zatímco první z nich může být u křivočarého pohybu i nulová (rovnoměrný pohyb), síla dostředivá je vždy nenulová :

$$\boxed{\vec{F}_\tau = m\cdot\vec{a}_\tau = m\cdot\frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau}}$$

tečná síla

$$\boxed{\vec{F}_n = \vec{F}_d = m\cdot\vec{a}_n = m\cdot\frac{v^2}{R}\cdot\vec{n}}$$

dostředivá síla



Nebo vyjádříme jen velikosti těchto sil :

$$\boxed{F_\tau = m\cdot a_\tau = m\cdot\frac{dv}{dt}}$$

$$\boxed{F_n = F_d = m\cdot a_n = m\cdot\frac{v^2}{R}}$$

Vidíme, že **tečná** síla určuje pouze změnu velikosti rychlosti, aniž mění její směr), zatímco síla **dostředivá** pak „formuje" křivku dráhy – pravá rovnice jasně ukazuje jak se v závislosti na velikosti této síly (při dané hmotnosti a rychlosti) vytvoří odpovídající poloměr křivosti dráhy pohybu.

Velmi často je dostředivá síla realizována jako síla tzv. ***vazby*** (např. kolejnice u vlaku, závěs kyvadla).

3) Odstředivá síla

Tento termín se používá ve dvou případech :

- jako název pro **reakci** k dostředivé síle (je to síla, kterou působí těleso např. na svůj závěs)
- jako název pro ***setrvačnou sílu*** v neinerciální soustavě (viz dále)

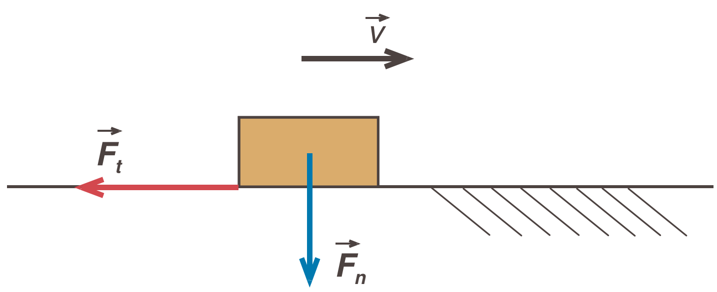
4) Pružná síla

Tato síla vzniká a působí v první fázi ***deformace*** reálných těles, kterou můžeme považovat za zvláštní „jednorázový" pohyb tělesa , a která končí buď **destrukcí** tělesa, či **klidovým stavem** zdeformovaného tělesa (v rovnováze s vnější působící silou), nebo mohou také vzniknout periodické pohybové stavy tělesa – ***kmity a vlnění*** (budeme probírat později).

5) Třecí síla

Je velmi zvláštní druh síly působící pouze mezi **vzájemně se dotýkajícími** tělesy, který má často zásadní význam v technických aplikacích. Tato síla vždy působí proti směru (možného) pohybu styčné plochy, spolupůsobí při změnách pohybového stavu těles, ale sama o sobě nikdy pohyb nevytváří. Její velikost v častém případě **smykového tření** závisí na kolmé síle $\vec{F}_n$ působící na styčné plochy, také na materiálu a struktuře těchto ploch (to vyjadřuje koeficient tření f), případně na pohybovém stavu :

$$\boxed{F_t = f \cdot F_n}$$



Shrnutí : Pojmem **síla** tedy podle 1. Newtonova zákona označujeme vzájemné reálné (skutečné) působení jednoho tělesa na těleso druhé. Výsledkem tohoto působení – účinkem síly – je změna pohybového stavu tělesa podle 2. Newtonova zákona (vlastně obou těles, viz 3. Newtonův zákon) – to je tedy **pohybový účinek** síly .

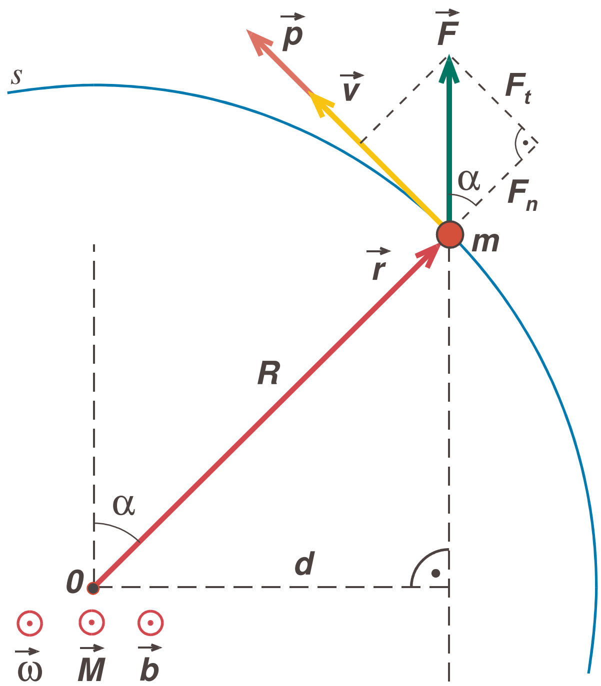
Síla také může způsobit deformaci tělesa, přitom můžeme zkoumat jeho **pružnost a pevnost** , které ovšem úzce souvisí se speciálním pohybem tělesa, případně jeho částí, při deformaci.

Často také pozorujeme, že působící síla nemá na nějaké těleso žádný pohybový účinek – v tomto případě ale vždy dochází k působení dalších těles - a jejich účinky na sledované těleso se vyrovnávají – vzniká **rovnovážný stav** tělesa (blíže viz kapitola „Dynamika soustavy hmotných bodů“). Tyto stavy zkoumá **statika** a jsou jistě zásadně důležité zejména ve stavebnictví, při návrhu strojů, … I tento stav rovnováhy tělesa je nedílně spojen s jeho (možnými) pohybovými stavy.

Změnu pohybového stavu tělesa proto právem považujeme za skutečně **základní účinek síly**. Z teoretického i aplikačního hlediska jsou pak důležité jeho následující speciální případy :

Pohybový účinek síly při otáčivém pohybu (otáčivý účinek síly) :

Prostudujme situaci na obrázku, kde síla $\vec{F}$ způsobuje otáčivý kruhový pohyb hmotného bodu m kolem středu O (tímto bodem tedy prochází nějaká osa rotace kolmá k nákresně) :



Ze střední školy víte, že otáčivý účinek síly (ležící v rovině otáčení) je úměrný její velikosti a kolmé vzdálenosti od osy rotace a kvantitativně ho popisujeme veličinou ***moment síly*** :

$$M = F \cdot d = F \cdot R \cdot \sin\alpha = R \cdot F_\tau$$

Vidíme, že na rotační pohyb má vliv pouze tečná složka síly, tj. složka kolmá k poloměru otáčení. Normálová složka se jen snaží změnit poloměr otáčení, v nejobecnější prostorové situaci by mohla ještě existovat třetí složka síly, rovnoběžná s osou, která by se snažila tuto osu vychýlit.

Když do středu otáčení O umístíme počátek soustavy souřadnic, pak poloměr otáčení je současně průvodičem hmotného bodu a moment síly můžeme definovat vektorově :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Velikost tohoto vektoru je ve shodě s předchozím skalární definicí a navíc – jeho **směr** udává nyní směr ***osy rotace*** – a tento směr má i **úhlová rychlost** rotace $\vec{\omega}$ - moment síly je tedy jednoznačně spojený s důsledkem svého působení (povšimněte si na obrázku, že jsou shodné i **orientace** těchto vektorů).

Dále - při znalosti pojmů „oskulační kružnice“ , případně „poloměr křivky“ nám musí být jasné, že i bez existence skutečné rotační osy lze mluvit o kruhovém pohybu hmotného bodu alespoň lokálně - v kterémkoliv místě obecného křivočarého pohybu.

Působením vhodné síly se přitom středem tohoto kruhového (rotačního) pohybu může stát jakýkoliv bod v prostoru, proto jsme oprávněni definovat a zkoumat moment síly vzhledem k **libovolnému bodu** O , do něhož pak umístíme **počátek** vztažné soustavy :

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

moment síly *(vzhledem k bodu O)*

Pozn. : Pak ovšem – když by se jednalo o skutečný rotační pohyb s pevnou osou rotace - a počátek soustavy souřadnic by byl někde na ose rotace – **nebude** vektor momentu síly **rovnoběžný** s touto osou - a rotaci bude ovlivňovat pouze jeho **rovnoběžná složka** (viz pohybová rovnice rotačního pohybu v kapitole „Dynamika soustavy hmotných bodů“)

Analogickou veličinu jako je moment síly používáme také pro zhodnocení výsledku působení síly – tj. pro zhodnocení **„míry otáčivého pohybu“** hmotného bodu :

$$\boxed{\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

moment hybnosti *(vzhledem k bodu O)*

Pozn. : Jak vidíte na obrázku – směr a orientace momentu hybnosti také souhlasí s úhlovou rychlostí rotace (a v případě podle předchozí poznámky půjde opět jen o jeho rovnoběžnou složku)

Důležitý vztah dostaneme, jestliže vypočítáme časovou změnu (derivaci) této veličiny, s využitím pravidel o derivaci součinu funkcí:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = (\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt}) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt})$$

Zatímco výraz v první závorce je zřejmě nulový (rovnoběžné vektory), ve druhé závorce vznikla časová derivace hybnosti, která se podle pohybové rovnice rovná působící síle. Dostáváme tedy :

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Nebo-li :

$$\boxed{\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M}}$$

pohybová rovnice rotačního pohybu *(hmotného bodu)*

Slovní vyjádření : ***Časová změna momentu hybnosti hmotného bodu je rovna*** *(je úměrná)* ***momentu působící síly***.

Název této rovnice poukazuje na její zásadní význam pro popis rotačního pohybu hmotného bodu. Veličiny moment síly a moment hybnosti jsou však definovány zcela **obecně** , vzhledem k libovolnému bodu prostoru , proto tato rovnice platí i pro jakýkoliv pohyb hmotného bodu v libovolně zvolené soustavě souřadnic (inerciální). To bude později využito při studiu dynamiky soustav hmotných bodů .

Časový účinek síly:

Provedeme nyní zajímavou úpravu pohybové rovnice :

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Vynásobíme rovnici diferenciálem času :

$$m \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot dt$$

Tím je vlastně provedena separace proměnných a diferenciální rovnici nyní integrujeme určitým integrálem (na nějaké části dráhy) – tj. provedeme jak integraci levé strany v mezích její proměnné (vektor rychlosti) od počáteční rychlosti $\vec{v}_1$ do konečné rychlosti $\vec{v}_2$ - tak také integraci pravé strany v mezích její proměnné (času) od počátečního času t_1 do konečného času t_2 (vidíte také, že počáteční čas nemusí být nulový) :

$$\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \cdot d\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt$$

Pravá strana rovnice, vyjadřující „**spolupůsobení**“ síly a jejího časového trvání , se definuje jako nová fyzikální veličina :

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt}$$

impulz síly

Pozn. : Na rozdíl od určitých integrálů, které jsme použili při ukázkovém řešení pohybové rovnice, se nyní integrují vektorové veličiny - vektorový zápis ale jako vždy pouze znamená, že jde o tři „paralelní" obyčejné rovnice (integrály) pro tři skalární veličiny - souřadnice vektoru :

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int_{t_1}^{t_2} F_x \cdot dt \\ I_y &= \int_{t_1}^{t_2} F_y \cdot dt \\ I_z &= \int_{t_1}^{t_2} F_z \cdot dt \end{aligned}\right\} \qquad \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt$$

Důsledek působení této veličiny potom dobře popisuje druhá strana rovnice. Jde o jednoduchý integrál přírůstků rychlosti (ale opět vektorová veličina) :

$$\vec{I} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m\, d\vec{v} = m \cdot \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d\vec{v} = m \cdot [\vec{v}]_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} = m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Výsledek není samozřejmě nijak překvapivý – působením síly přece dochází ke změně rychlosti hmotného bodu, tedy i ke změně jeho hybnosti - vznikla však velmi užitečná **rovnost celkové změny hybnosti a působícího impulzu síly** (změna hybnosti se tedy děje vždy ve směru impulzu síly) :

$$\boxed{\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta \vec{p}}$$

impulz síly a změna hybnosti

Specifická situace nastane při působení **konstantní síly** – tu lze totiž vytknout a zbylý integrál nám dá časový interval jejího působení :

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \vec{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{F} \cdot [t]_{t_1}^{t_2} = \vec{F} \cdot (t_2 - t_1) = \vec{F} \cdot \Delta t$$

A kromě jednoduchého výpočtového vztahu je zřejmé, že celková změna hybnosti a rovněž změna rychlosti nastane nyní nejen ve směru impulzu síly, ale přímo **ve směru působící síly** :

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p} = m \cdot \Delta \vec{v}$$

(Další účinek síly - ***dráhový účinek síly*** – bude probrán ve zvláštní kapitole.)

----

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 02/2006**

rev. 02/2007