Kinematika

Tato vědní disciplina popisuje a zkoumá pohyb hmotných těles, aniž ji zajímají příčiny tohoto pohybu.

Pojem hmotného bodu

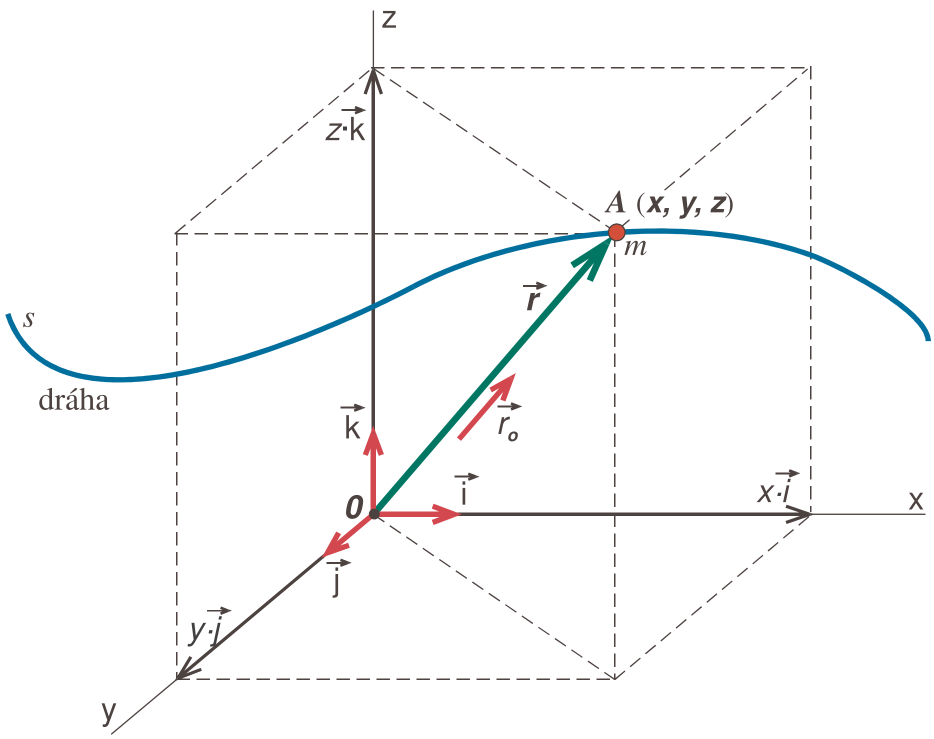
Název ***hmotný bod (bodové těleso)*** používáme pro modelový hmotný objekt (o hmotnosti m), jehož rozměry (objem) jsou zanedbatelně malé, matematicky nekonečně malé.

Zavedení polohového vektoru

Jestliže v dané kartézské soustavě souřadnic má hmotný bod okamžitou polohu (v čase t) :

$A = (x, y, z)$,

potom definujeme ***polohový vektor (průvodič)*** tohoto hmotného bodu jako vektor s počátečním bodem v počátku 0 soustavy souřadnic a s koncovým bodem v místě A hmotného bodu (viz obr.) :



Pro matematické vyjádření polohového vektoru pak můžeme využít libovolnou ze tří standardních možností zápisu vektorů, které znáte z matematické analýzy :

$$\boxed{\vec{r} = (x, y, z)}$$ ***<u>zápis průvodiče pomocí souřadnic</u>***

$$\boxed{\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}}$$ ***<u>zápis průvodiče pomocí složek</u>***

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_o \cdot r}$$ ***<u>zápis průvodiče pomocí jednotkového vektoru</u>***

Pro výše použitý jednotkový vektor průvodiče platí rovněž známá vektorová rovnice :

$$\boxed{\vec{r}_o = \frac{\vec{r}}{r}}$$ ***<u>jednotkový vektor průvodiče</u>***

A také velikost průvodiče musí být v souladu s obecnými vztahy pro vektory :

$$\boxed{|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$ ***<u>velikost průvodiče</u>***

V kinematice vždy sledujeme **<u>pohyb</u>** hmotného bodu po nějaké **<u>dráze</u>** s , hmotný bod tedy mění v průběhu času svoji polohu, <u>mění se proto i jeho polohový vektor</u> – potom všechny výše uvedené veličiny musí být jednoznačně definovány v každém časovém okamžiku - jsou to tedy **<u>funkce času</u>** (**<u>vektorové</u>** funkce, pouze v případě <u>velikosti</u> průvodiče funkce **<u>skalární</u>**).
Když pak dokážeme nalézt polohový vektor jako takovou funkci (a tento problém řeší dynamika) :

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

Znamená to vlastně nalezení parametrických rovnic dráhy pohybu :

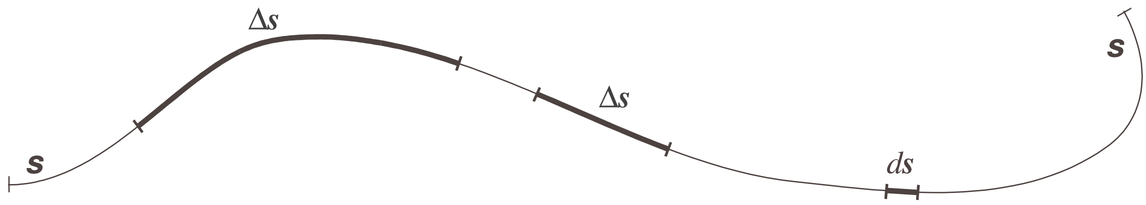
$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}}$$ ***<u>parametrické rovnice dráhy</u>***

To je <u>první výhoda</u> používání polohového vektoru hmotného bodu. Druhou a <u>hlavní výhodou</u> je však možnost „kompletně“ vyjádřit <u>základní kinematické veličiny</u> - rychlost a zrychlení pohybu - jako veličiny <u>vektorové</u> :

Připomeňme si ale nejprve, co znáte ze střední školy o **<u>definici rychlosti</u>** : Je to <u>podíl</u> velikosti (délky) Δs části dráhy (úseku, elementu dráhy, viz obr.) a času (časového intervalu) Δt , za který hmotný bod uvedenou dráhu urazí, tedy :

$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Podíl těchto veličin lze dobře popsat jako dráhu proběhnutou za (zvolenou) jednotku času. Je to vlastně **slovní vyjádření** této veličiny *: **Rychlost je (číselně) rovna dráze (velikosti, délce dráhy) vykonané (uražené, uběhnuté) za jednotku času.***



Použitý symbol (Δ) u dráhy a času – velké řecké písmeno delta – se vždy používá k označení zvolené **části** nějaké veličiny (jinak řečeno **intervalu** , **úseku** , **elementu**).
U veličin, které jsou matematickými spojitými funkcemi, je pak vhodnější použít termín ***změna*** veličiny – případně ***přírůstek*** nebo ***úbytek*** této veličiny.
To je také případ délky vykonané dráhy, která je zřejmou (rostoucí) spojitou funkcí času :

$$\boxed{s = s(t)}$$

A proto její libovolná část (úsek) je přírůstkem této funkce za zvolený časový interval $\Delta t = t_2 - t_1$, tj. je rovna rozdílu hodnot funkce v koncovém a počátečním bodě tohoto časového intervalu :

$$\boxed{\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = s_2 - s_1}$$

Nebo v poněkud obecnější formě, bez použití indexů :

$$\boxed{\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)}$$

Zvolená část veličiny – v našem případě úsek nějaké dráhy - může být libovolně velikou částí celé dráhy (a třeba i dráha celá). Pak ovšem vypočítaná rychlost je spojená s celým takto vybraným úsekem – je to ***průměrná rychlost*** na tomto úseku dráhy. (Například na stokilometrové dráze z Plzně do Prahy nás mohou zajímat průměrné rychlosti na úsecích délky několika kilometrů, desítek kilometrů, i na celé dráze.)

Pozn. : Písmeno ***s*** se tedy používá k označení proběhnuté délky dráhy, i k označení geometrické křivky této dráhy.

Veličina průměrná rychlost tedy hodnotí rychlost hmotného bodu na celém úseku dráhy Δs , ale vůbec nic nám neříká o „lokálním“ pohybovém stavu v jednotlivých menších úsecích této dráhy.
Pro detailní popis pohybu se proto zavádí další veličina - ***okamžitá rychlost*** - která má zřejmý smysl rychlosti v **daném čase** . V určitém časovém okamžiku je hmotný bod také na **určitém místě** dráhy, tj. v nějakém jejím bodě.

Pro výpočet takové rychlost pak ale jistě volíme co možná nejmenší část dráhy – o délce řádově metry, spíše však decimetry, centimetry, milimetry…..a potom musíme vydělit tuto dráhu příslušným časem potřebným k jejímu proběhnutí - ten bude určitě také velmi malý .

Abychom se přiblížili geometrické představě **bodu** dráhy, ve kterém určujeme rychlost - jako **nekonečně malého objektu** - měl by být zvolený úsek dráhy vlastně také **nekonečně malý**, tedy „prakticky" nulový - stejně jako potřebný čas.

Nulové hodnoty ovšem do vztahu pro rychlost nemůžeme přímo dosadit, protože zlomek by neměl smysl - budeme se proto k nulové dráze a nulovému času tedy pouze přibližovat – a díky matematické analýze se k nim můžeme přiblížit nekonečně blízko .

Shrňme tyto úvahy :

Pro výpočet **okamžité rychlosti** použijeme stejný vzorec jako pro rychlost průměrnou, tj. bude to **podíl** části dráhy a času potřebného k jejímu vykonání. Do tohoto vzorce však budeme (myšlenkově) postupně dosazovat stále menší a menší úseky dráhy, co nejvíce se přibližující k nule (a příslušné časy, které se také budou blížit k nule). Výsledkem bude řada – **posloupnost** - hodnot rychlosti, které se budou přibližovat k nějaké **mezní hodnotě** - k naší požadované okamžité rychlosti.

Pro tuto mezní hodnotu se v matematice používá pojem ***limita*** a její hodnota (a podmínky procesu jejího vytváření) se formálně zapisuje standardním způsobem :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

V případě existence funkcí v čitateli a ve jmenovateli využijeme ovšem znalosti přírůstků těchto funkcí :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

Při tomto procesu přibližování k mezní, limitní hodnotě nabývají tedy části veličin v čitateli i jmenovateli zlomku velmi malé hodnoty. Nejsou přímo nulové, ale k nule se přibližují libovolně blízko – jsou to tzv. **nekonečně malé hodnoty** .

K pojmenování takové nekonečně malé části určité veličiny se pak používá matematického pojmu ***diferenciální (elementární) část*** (interval, úsek, veličina, element), nebo jednoduše ***diferenciál*** , zejména je-li tato veličina spojitou matematickou funkcí nebo její spojitou proměnnou.

K označení diferenciálů používáme písmeno d , někdy δ nebo ∂ a z předešlého textu je zřejmé, že mohou být také napsány jako limity :

$$ds = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s = \lim_{\Delta t \to 0} \big(s(t+\Delta t) - s(t)\big) = \lim_{t_2 \to t_1} \big(s(t_2) - s(t_1)\big)$$

$$dt = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t = \lim_{t_2 \to t_1} (t_2 - t_1)$$

Okamžitá rychlost bude tedy definována jako podíl diferenciálních částí (diferenciálů) dráhy a času :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}}$$

okamžitá rychlost (velikost)

Matematický postup přibližování se k limitní hodnotě podílu úseku dráhy a časového intervalu ale nic **nemění** na **smyslu** tohoto podílu – každý člen řady, i sama limita, má stále význam *velikosti (délce) dráhy proběhnuté za jednotku času.*

Tedy ***okamžitá rychlost*** hmotného bodu vyjádřená jako podíl diferenciálních částí dráhy a času má stejný smysl jako průměrná rychlost – je rovna **dráze (délce, velikosti dráhy) uražené za jednotku času** - ale je definována v **daném místě** dráhy, tj. v **daném čase**.

Výše jsme již uvážili, že délka vykonané dráhy je spojitou funkcí času a také nezávisle proměnná – čas – je samozřejmě ekvivalentní spojité funkci, proto je tato ***okamžitá rychlost*** podílem ***skutečných (úplných) diferenciálů*** (funkcí) a může být chápána jako ***časová změna (přírůstek)*** délky dráhy za jednotku času.

Pro **praktický výpočet** je potom nejdůležitější, že vytvořená definice okamžité rychlosti je současně také matematickou definicí ***derivace (délky) dráhy podle času*** :

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} s(t)}$$

Samozřejmě vím, že jsem předchozími řádky lehce znudil ty z vás, kteří už zcela běžně derivují a integrují, chtěl jsem ale zopakovat pro fyziku důležité pojmy jako přírůstek funkce a diferenciál , které dále použijeme u funkce vektorové, a chtěl jsem také zdůvodnit , proč fyzikové **derivaci** funkce často raději nahrazují **podílem diferenciálů** , který má **obecnější platnost** .

Už v termodynamice poznáte, že opravdu existují fyzikální veličiny, která jsou sice nekonečně malé, ale nejedná se o skutečné diferenciály funkcí - z jednoduchého důvodu, že příslušné funkce prostě neexistují. Takové je např. teplo dQ potřebné k (nekonečně) malému ohřátí plynu - nelze totiž najít funkci Q (stavových veličin plynu), která by popsala celkové ohřátí plynu, protože toto teplo závisí také na konkrétním termodynamickém procesu ohřevu. Při exaktním popisu se pro tuto veličinu používá také odlišné označení – δQ - je to tzv. ***neúplný diferenciál*** . Závěrem tedy shrneme :

Na formální znak derivace – tj. zlomek s diferenciálními veličinami - můžeme vždy pohlížet jako na skutečný podíl (skutečný zlomek) dvou (nekonečně) malých veličin, ale ne vždy se také jedná o matematickou derivaci.

Nyní se už podívejme, jak lze definovat okamžitou rychlost pomocí polohového vektoru :

Jde totiž o to, že okamžitá rychlost je typická fyzikální ***vektorová veličina*** - tj. má nejen ***velikost*** – tu jsme již stanovili - ale má také určitý ***směr*** (a orientaci).

Veškerá lidská zkušenost s mechanickým pohybem nás přitom přesvědčuje, že (okamžitá) rychlost má vždy **směr tečny dráhy** v daném místě. Jak ale nalezneme její souvislost s polohovým vektorem hmotného bodu ?

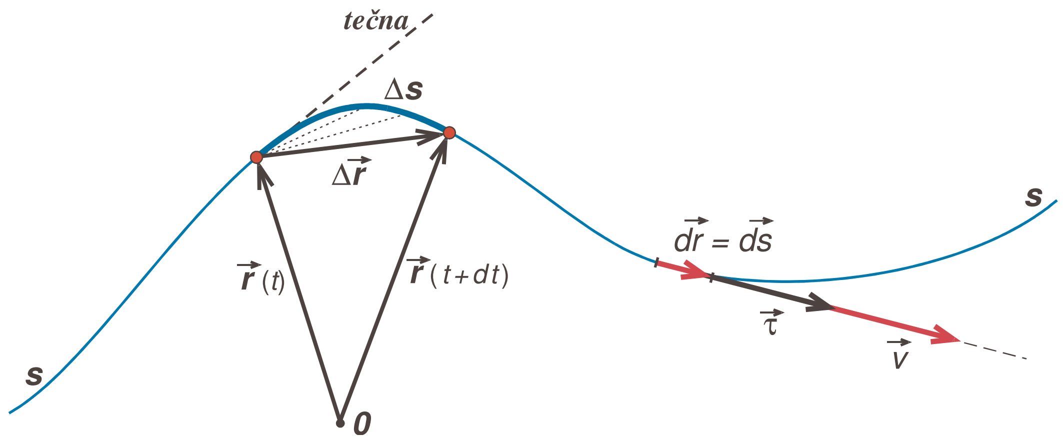
Již při definici průvodiče jsme si uvědomili, že průvodič není nějaký konstantní vektor, ale že se jedná o **vektorovou funkci** času, neboť s hmotným bodem, pohybujícím se po nějaké dráze, se také současně pohybuje koncový bod tohoto vektoru.

Tak jako jsme výše definovali změnu „obyčejné“ skalární funkce pomocí rozdílu jejích hodnot v konečném a v počátečním bodě, můžeme stejně definovat **změnu (přírůstek) vektorové funkce** – našeho **polohového vektoru** – tato změna bude ovšem také vektorová veličina :

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1}$$

přírůstek (změna) průvodiče

Následující obrázek nám ukazuje, že tento vektor je **sečnou** dráhy hmotného bodu mezi místy $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$.



Je zřejmé, že **délka sečny** je **velikostí tohoto vektoru** a že se přibližně rovná **délce části dráhy** mezi oběma uvažovanými místy :

$$\boxed{|\Delta\vec{r}| \doteq \Delta s}$$

Rovnost je tím lépe splněna, čím je sečna křivky kratší a zřejmě tedy platí přesně v limitě pro nekonečně malý časový interval Δt , kdy oba krajní body sečny splynou do jednoho bodu - sečna potom přejde na **tečnu křivky** v tomto bodě.

Pak se vektor přírůstku průvodiče blíží nule a vzniká vlastně diferenciál této vektorové funkce :

$$\boxed{d\vec{r} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r}}$$

diferenciál průvodiče

Také je možno formálně napsat :

$$\boxed{d\vec{r} \;=\; \vec{r}(t+dt) \;-\; \vec{r}(t)}$$

V tomto mezním případě, kdy se sečna změní na tečnu, splývá diferenciál průvodiče s diferenciálním elementem dráhy a oba tvoří nekonečně malou **část dráhy** hmotného bodu - jejich velikosti jsou tedy shodné :

$$\boxed{\left| d\vec{r} \right| \;=\; ds}$$

A je také zřejmé, že oba tyto diferenciály jsou také **částí přímky** tečny – mohou být tedy zakresleny jako dvě (nekonečně malé) **shodné úsečky** – ale diferenciál průvodiče je navíc vektor, tj. orientovaná úsečka (ve směru pohybu hmotného bodu) - často se také nazývá **orientovaným elementem dráhy** a k jeho označení se může použít stejné písmeno, jako je označení křivky (s , někdy také l) :

$$\boxed{d\vec{r} \;=\; d\vec{s} \;=\; d\vec{l}}$$

orientovaný element *(křivky)* ***dráhy***

Tečna (a také normála) je v každém místě křivky jednoznačně definována (její výpočet je matematická záležitost), proto u dráhy hmotného bodu vždy můžeme počítat s existencí ***jednotkového tečného vektoru*** $\vec{\tau}$ (orientaci volíme ve směru pohybu, viz obr.), s jehož pomocí lze standardně vyjádřit diferenciál průvodiče – orientovaný element dráhy :

$$\boxed{d\vec{r} \;=\; \left| d\vec{r} \right| \cdot \vec{\tau} \;=\; ds \cdot \vec{\tau}}$$

Nyní se vrátíme k vektoru okamžité rychlosti , který rovněž leží na tečně dráhy , a lze ho tedy také vyjádřit pomocí jednotkového tečného vektoru křivky a známé velikosti okamžité rychlosti :

$$\vec{v} \;=\; v \cdot \vec{\tau} \;=\; \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

Jestliže je možno zacházet s derivací funkce jako s obyčejným podílem diferenciálů, proveďme tedy naznačené násobení :

$$\vec{v} \;=\; \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau} \;=\; \frac{ds \cdot \vec{\tau}}{dt}$$

Podle horní rovnice v rámečku však nyní vznikl v čitateli diferenciál průvodiče a dostáváme tak velmi efektní možnost přímé exaktní **definice vektoru okamžité rychlosti** pomocí průvodiče hmotného bodu :

$$\boxed{\vec{v} \;=\; \frac{d\vec{r}}{dt} \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

okamžitá rychlost *(vektor)*

Tento vektor tak obsahuje kompletní informaci o rychlosti pohybu hmotného bodu – jeho **velikost** je shodná se dřívější skalární definicí okamžité rychlosti (jako dráhy uražené za jednotku času), ale navíc má nyní **směr** tečny dráhy a jednoznačnou **orientaci** (ve směru pohybu hmotného bodu)

Okamžitá rychlost hmotného bodu jako **podíl diferenciálů** průvodiče a času může být chápána (ve shodě se smyslem podílu skalárních diferenciálů) jako **časová změna** průvodiče (za jednotku času), matematicky je to pak ***derivace průvodiče*** podle času.

Pozn. : Pro zkrácení zápisu se k formálnímu označení derivace někdy používá pouze čárka nad písmenem funkce, případně tečka , zejména jde-li o časovou derivaci :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$$

Derivace vektoru (vektorové funkce) je stejně jako sám vektor **formální matematický výraz** , který konkrétně znamená derivaci všech souřadnic vektoru :

$$\boxed{\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}$$

zápis vektoru rychlosti pomocí souřadnic

Případně zapsáno ***pomocí složek*** :

$$\boxed{\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}}$$

Pozn. : Tento složkový zápis je teoreticky velmi významný – ukazuje, že libovolný **obecný křivočarý** pohyb (jeho rychlost) lze **rozložit** do tří jednoduchých pohybů, které se konají na souřadných osách, tj. do tří **přímočarých** pohybů – je to vlastně zdůvodnění ***principu skládání pohybů*** . Uvažme, že vlastně také element dráhy ($d\vec{r}$) se rozkládá na tři elementy na osách (*dx, dy, dz*) a na další stránce uvidíme, že totéž platí i pro zrychlení pohybu.

Zápis vektoru rychlosti pomocí jednotkového vektoru už známe - z něj jsme vlastně vycházeli :

$$\boxed{\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}}$$

zápis vektoru rychlosti pomocí jednotkového vektoru

kde $\vec{\tau}$ je jednotkový tečný vektor v daném místě dráhy a **velikost rychlosti** v je určena známým vztahem pro velikost vektoru :

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

velikost vektoru rychlosti

A současně pro **velikost rychlosti** samozřejmě platí dříve odvozená skalární definice :

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

__**Analogickým způsobem**__ , jako jsme definovali vektor okamžité rychlosti, můžeme dále definovat vektor okamžitého zrychlení hmotného bodu - tj. jako __**časovou změnu**__ vektoru rychlosti :

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

__***okamžité zrychlení***__ *(vektor)*

A stejně dobře lze popsat význam – slovní hodnocení - této veličiny : ***(okamžité) zrychlení je (číselně) rovno změně (přírůstku) rychlosti za jednotku času*** ***(v daném čase, v daném místě dráhy).***

Do definičního vztahu lze také hned dosadit předchozí vztah pro okamžitou rychlost :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

Nebo formálně :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}}$$

Analogické je také vyjádření vektoru zrychlení v __***souřadnicích***__ a __***složkách***__ :

$$\boxed{\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right) = (\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})}$$

$$\boxed{\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \dot{v}_x \cdot \vec{i} + \dot{v}_y \cdot \vec{j} + \dot{v}_z \cdot \vec{k} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k}}$$

A také jeho velikost :

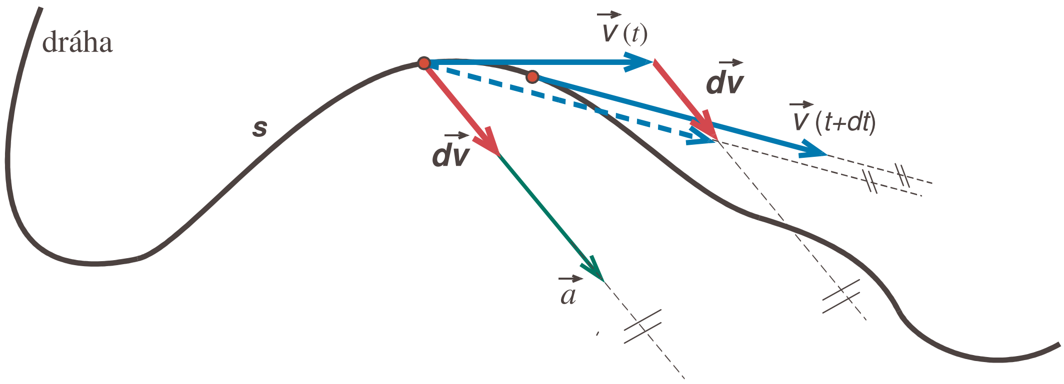
$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Je však vynechán zápis pomocí jednotkového vektoru, neboť __určení směru__ tohoto vektoru, na rozdíl od směru rychlosti, již __není__ triviální.

Směr vektoru zrychlení můžeme totiž vidět přímo z __definice__ této veličiny (jako podílu diferenciálu rychlosti a diferenciálu času), kterou případně upravíme s využitím možnosti manipulovat s podílem diferenciálů jako s obyčejným zlomkem :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{dt} \cdot d\vec{v}$$

Tato vektorová rovnice nám říká, že __směr zrychlení__ je dán směrem __diferenciálu rychlosti__ , tj. změny (přírůstku) rychlosti - neboť __násobení skalárem__ má vliv pouze na __velikost__ vektoru a __nemění__ jeho směr.



Jestliže si pak nakreslíme do obrázku přírůstek rychlosti jako rozdíl vektorů rychlostí ve dvou (nekonečně) blízkých bodech dráhy :

$$d\vec{v} = \vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)$$

a uvážíme-li různé možnosti velikostí a směrů těchto vektorů (v důsledku nerovnoměrnosti pohybu a různého možného zakřivení dráhy), pak je jistě zřejmé, že vektor okamžitého zrychlení může mít v prostoru zcela libovolný směr.

Protože u dráhy pohybu jako geometrické křivky lze v každém bodě vždy jednoznačně určit ***tečnu*** a ***normálu*** , provádí se velmi často **rozklad vektoru** zrychlení do těchto dvou směrů (v rovině křivky v daném místě, jinak v prostoru je nutno přidat třetí směr – binormálu).

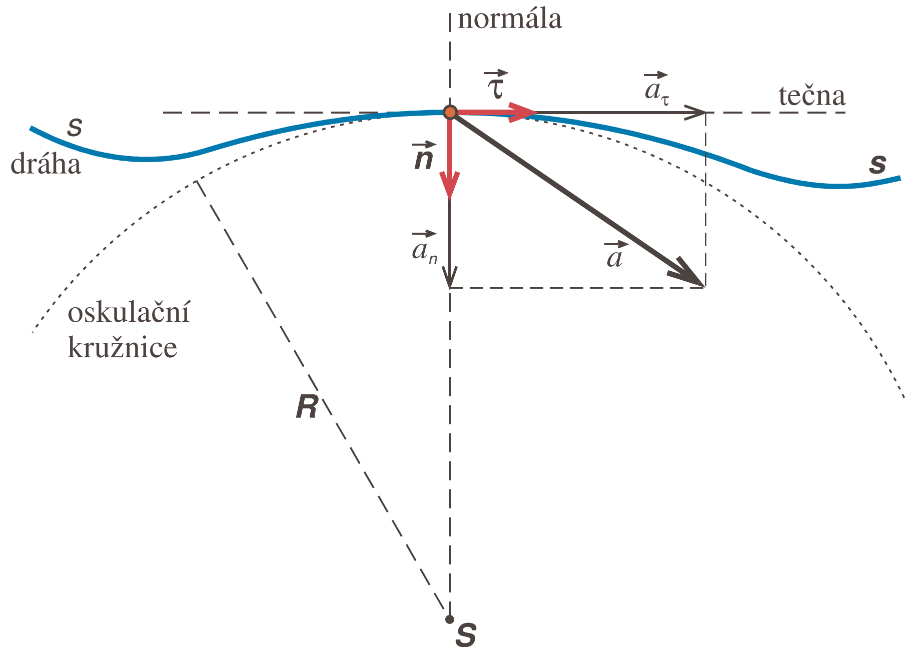
Jde vlastně o rozklad vektoru zrychlení do dvou kartézských os na tečnou a normálovou složku :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}}$$

rozklad vektoru zrychlení

$$|\vec{\tau}| = |\vec{n}| = 1$$

kde $\vec{\tau}$ je **jednotkový tečný vektor** (použitý již u vektoru rychlosti) a $\vec{n}$ je **jednotkový normálový vektor** (viz obr.)



Pro stanovení obou těchto složek zrychlení využijeme známý zápis rychlosti pomocí jednotkového tečného vektoru :

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$$

a vypočítáme zrychlení s využitím pravidla o derivaci součinu (které platí jak pro součin dvou skalárů (funkcí), tak i pro součin skaláru a vektoru a rovněž pro součin dvou vektorů, skalární i vektorový, jak se můžete sami přesvědčit rozepsáním vektorových výrazů do souřadnic) :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

První člen obsahuje jednotkový tečný vektor a skalární výraz - je to již tedy evidentně **tečná složka** zrychlení. Jasně přitom vidíme, že derivace velikosti rychlosti podle času neurčuje celé zrychlení, ale pouze tuto jednu složku.

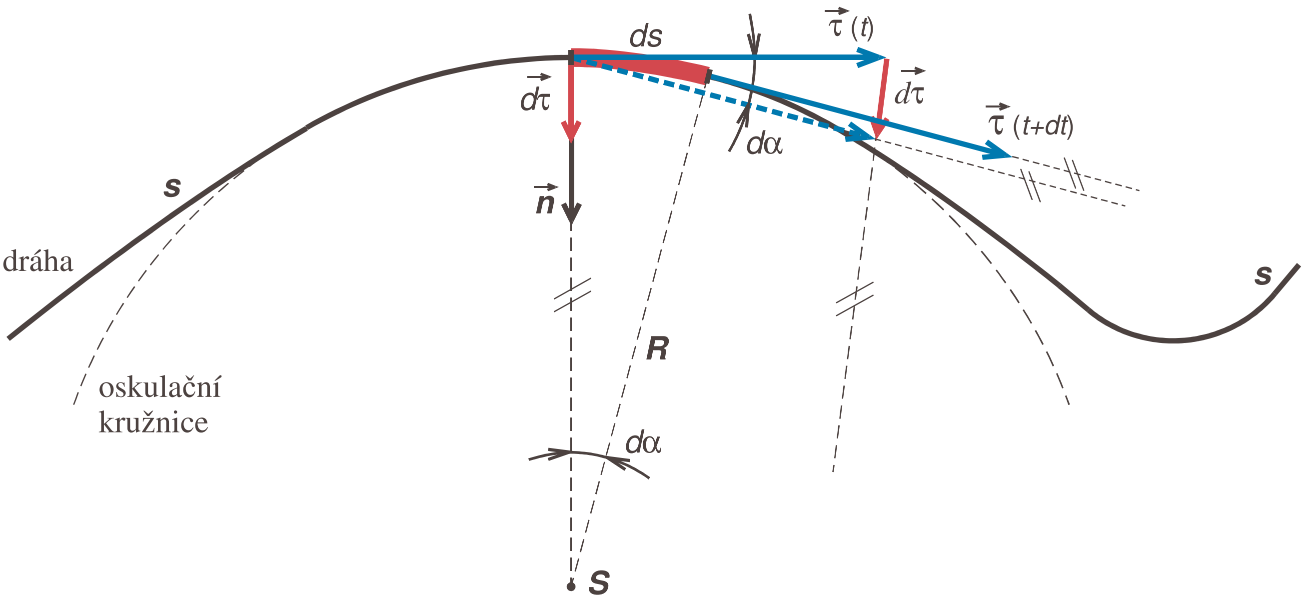
Upravujme dále druhý člen pomocí formálního pojetí jednotkového tečného vektoru jako složené funkce :

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(t) = \vec{\tau}(s(t))$$

Pak můžeme totiž použít pravidel o derivaci složené funkce :

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot v$$

Podívejme se nyní, jak vypadají tyto veličiny v libovolném místě dráhy hmotného bodu a jaký je jejich vztah k ***oskulační kružnici*** poloměru R :



S pomocí obrázku především uvažme, jaký směr má vektor $d\vec{\tau}$ - musí mířit právě do středu této oskulační kružnice, tj. má směr jednotkového normálového vektoru $\vec{n}$ křivky – proto tedy je možno vektor $d\vec{\tau}$ zapsat pomocí jeho velikosti a tohoto jednotkového vektoru :

$$d\vec{\tau} = d\tau \cdot \vec{n}$$

Ještě využijme stejného úhlu $d\alpha$ v podobných trojúhelnících vytvořených tečnými vektory a poloměry oskulační kružnice na počátku a konci časového intervalu dt (viz. obr.) :

$$d\varphi = \frac{d\tau}{1} = \frac{ds}{R}$$

Časovou změnu jednotkového tečného vektoru lze pak jednoduše vyjádřit :

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot v = \frac{d\tau\cdot\vec{n}}{ds}\cdot v = d\tau\cdot\frac{\vec{n}}{ds}\cdot v = \frac{ds}{R}\cdot\frac{\vec{n}}{ds}\cdot v = \frac{v}{R}\cdot\vec{n}$$

Tento výsledek dosadíme do výchozího vztahu pro zrychlení :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + v\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + v\cdot\frac{v}{R}\cdot\vec{n}$$

A v konečném tvaru :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\cdot\vec{n}}$$

rozklad vektoru zrychlení

Pro velikosti složek vektoru zrychlení tedy dostáváme :

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt}}$$

velikost tečné složky zrychlení *(„tečné zrychlení“)*

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$

velikost normálové složky zrychlení *(„normálové zrychlení“)*

Pomocí těchto složek pak také můžeme jednoduše vyjádřit velikost vektoru zrychlení, neboť to jsou kartézské složky :

$$\boxed{a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}}$$

velikost zrychlení

Z uvedených rovnic je zřejmé, že **zrychlení křivočarého pohybu není nikdy nulové**. I v případě rovnoměrného pohybu (tj. konstantní rychlostí v, jako např. rovnoměrný kruhový pohyb), kdy je sice tečné zrychlení rovno nule :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

je ale v důsledku zakřivení dráhy (existence poloměru křivosti R) vždy nenulové zrychlení normálové (dostředivé) , samozřejmě pokud je nenulová rychlost :

$$a_n = \frac{v^2}{R} \neq 0$$

A toto zrychlení pak určuje i celkové zrychlení (jeho velikost) :

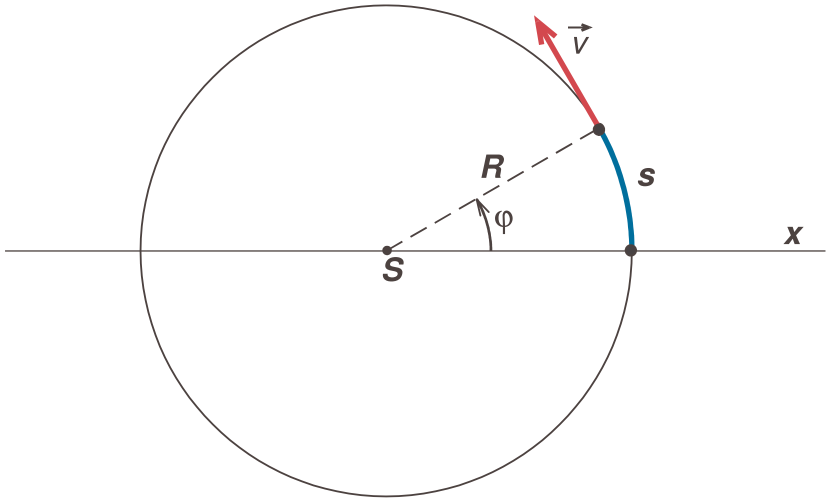
$$a = a_n = \frac{v^2}{R} \neq 0$$

Dále si blíže všimneme kruhového pohybu , jako speciálního případu pohybu křivočarého, velmi často využívaného v technických aplikacích i v teoretických úvahách :

Kruhový (rotační) pohyb

Aniž opět zkoumáme příčiny takového pohybu (v dynamice uvidíme, že na hmotný bod musí působit konstantní dostředivá síla), konstatujeme pouze, že dráhou hmotného bodu je kružnice o poloměru R se středem v nějakém bodě S .

K popisu kruhového pohybu pak většinou zavádíme ***úhlové veličiny*** (viz obr.) :



Využíváme přitom geometrické **definice úhlu** (v radiánech) pomocí dráhy s opsané (vykonané) na obvodu kružnice o poloměru R (kladný směr odečtu úhlu volíme standardně proti směru hodinových ručiček) :

$$\boxed{\varphi = \frac{s}{R} \qquad [rad] = [-]}$$

definice úhlu

která matematicky také znamená **jednoznačné přiřazení** (vztah) veličin vykonané dráhy s a úhlu φ opsaného průvodičem :

$$\boxed{s = R \cdot \varphi}$$

Tuto rovnici derivujme podle času, tj. derivujme její pravou i levou stranu :

$$\frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Máme již nějaké zkušenosti s diferenciály, můžeme proto uvážit, že vzniklé časové změny dráhy a úhlu znamenají samozřejmě na jedné straně dráhu vykonanou na obvodu za jednotku času , tj. ***obvodovou rychlost*** v, která je zřejmě ekvivalentní obyčejné „dráhové“ okamžité rychlosti (skalární) a na straně druhé pak dostáváme úhel opsaný průvodičem za jednotku času , tj. ***úhlovou rychlost*** ω :

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

obvodová rychlost

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$$

úhlová rychlost

Objevili jsme tak další jednoznačný vztah mezi dráhovými a úhlovými veličinami, nyní rychlostí :

$$\boxed{v = R \cdot \omega}$$

Tuto rovnici znovu derivujeme :

$$\frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

Na levé straně vzniká známá veličina ***tečného zrychlení*** a_τ a na straně pravé je pak časová změna úhlové rychlosti, tj. ***úhlové zrychlení*** ε :

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt}}$$

tečné zrychlení

$$\boxed{\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}}$$

úhlové zrychlení

A máme třetí vztah pro dráhové a úhlové veličiny, tentokrát pro zrychlení :

$$\boxed{a_\tau = R \cdot \varepsilon}$$

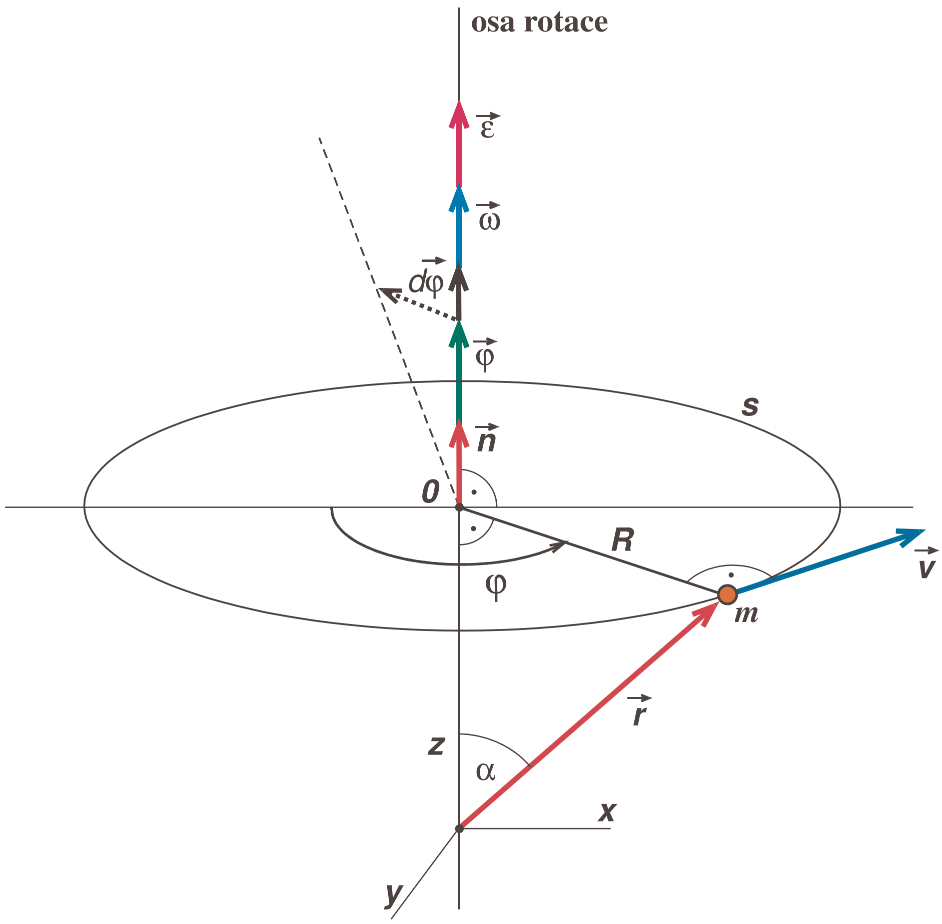
Jelikož lze i dostředivé zrychlení vyjádřit pomocí úhlové rychlosti :

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R \cdot \omega)^2}{R} = R \cdot \omega^2$$

znamená to, že kruhový (rotační) pohyb je úhlovými veličinami (φ, ω, ε) dostatečně popsán – tj. umíme z nich jednoznačně určit všechny dráhové veličiny (dráhu, rychlost a zrychlení – tedy vlastně pouze jejich velikosti s, v, a).

Uvažme ovšem, že dráhové veličiny jsou ale obecně ***vektory*** . Pak se naskýtá otázka, zda by bylo možno definovat vektorově také úhlové veličiny - v první řadě úhel opsaný průvodičem.

Základní podmínkou je zde jistě **nalezení směru** takového vektoru, který by bylo možno **jednoznačně přiřadit** tomuto úhlu, tj. vlastně i celému kruhovému (rotačnímu) pohybu. Tuto vlastnost má přímka procházející středem kruhové dráhy a kolmá k rovině pohybu, tj. ***rotační osa*** .



Jednotkový normálový vektor $\vec{n}$, kolmý k rovině rotace, definuje proto jednoznačně směr této osy a také hledaný **směr vektoru úhlu** - jeho **orientace** se potom standardně volí tak, aby z konce normálového vektoru bylo vidět pohyb po kružnici v kladném smyslu a jeho **velikost** pak jistě stanovíme rovnou (kladné) velikosti opsaného úhlu :

$$\left| \vec{\varphi} \right| = \left| \varphi \right|$$

Pro vektor úhlu tedy můžeme použít zápis pomocí jeho velikosti a jednotkového vektoru :

$$\boxed{\vec{\varphi} = \varphi \cdot \vec{n}}$$

vektor opsaného úhlu

Potom se i další úhlové veličiny stanou „automaticky“ vektorovými veličinami :

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}}$$ ***vektor úhlové rychlosti***

Před dalším krokem uvážíme, že směr vektoru úhlové rychlosti je určen směrem diferenciálu úhlu, tj. směrem přírůstku (změny) úhlu – to ale znamená **změnu směru osy rotace** - což je jistě velmi zásadní změna rotačního pohybu, která sice obecně může být skutečně jakákoliv , ale například u nesčíslného počtu rotujících strojních součástí s pevnými ložisky se v běžném provozu ani neočekává (různé hřídele, kola, turbiny, motory…).

To je jednoduchý případ tzv. ***pevné osy*** , která udržuje konstantní směr v prostoru a nepřipustí proto jinou možnost než $d\vec{\varphi} \parallel \vec{\varphi}$. Úhlová rychlost bude potom také ve směru osy rotace (a její orientace bude stejná jako orientace diferenciálu úhlu, tj. z konce vektoru bude vidět přírůstek úhlu v kladném smyslu) :

$$\boxed{\vec{\omega} \parallel \vec{\varphi}}.$$

Analogicky vypočítáme vektor úhlového zrychlení :

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$$ ***vektor úhlového zrychlení***

Jeho směr je opět jednoznačný pouze u **pevné osy** , kdy pak vlastně všechny úhlové veličiny budou ležet v jedné přímce – v ose rotace :

$$\boxed{\vec{\varepsilon} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{\varphi}}$$

Při rotačním pohybu hmotného bodu (i tělesa) se vždy snažíme umístit vztažnou **soustavu souřadnic** tak, aby její **počátek ležel na ose** rotace, přitom není nutné, aby byl přímo ve středu kruhového pohybu (viz. obr.) :

Pak lze totiž popsat vztah mezi dráhovými a vektorovými veličinami skutečně jednoduchými, hezkými rovnicemi, jak laskavý čtenář dále nahlédne.

Vyjádřeme nejprve poloměr kruhového pohybu hmotného bodu (viz. obr.):

$R = r \cdot \sin\alpha$

Potom pro obvodovou rychlost dostaneme :

$v = R \cdot \omega = r \cdot \sin\alpha \cdot \omega$

To je ale velikost vektorového součinu a vektor rychlosti tak může být vyjádřen vztahem (zkontrolujte na obrázku směr vektoru) :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$ ***obvodová rychlost***

Dále vypočítáme vektor zrychlení jako derivaci tohoto výrazu, s využitím znalosti derivace součinu a známých výrazů pro úhlové zrychlení a obvodovou rychlost :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Uvážíme-li podle obrázku směry výsledných vektorů, dostáváme vlastně rozklad vektoru zrychlení na tečnou a normálovou složku (psát závorku není nutné, jestliže přijmeme dohodu, že postupné matematické operace se konají zprava doleva) :

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}}$$

tečné zrychlení

$$\boxed{\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

normálové zrychlení

Opět vidíme, že u kruhového rovnoměrného pohybu, který má konstantní obvodovou i úhlovou rychlost, je tečné zrychlení nulové :

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} = 0$$

A celkové zrychlení je určeno pouze zrychlením normálovým (dostředivým) :

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{v^2}{R}\cdot\vec{n} \neq 0$$

---

konec kapitoly

K. Rusňák, verze 02/2006
rev. 02/2007