Skládání rychlostí v teorii relativity

Mějme opět dvě inerciální soustavy S a S' za stejných podmínek jako v minulé kapitole a zabývejme se nyní **rychlostmi** nějakého tělesa (přesněji hmotného bodu) v těchto soustavách.

Budeme jistě očekávat, že v souřadné soustavě S platí standardní definice ***okamžité rychlosti*** :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (v_x, v_y, v_z)}$$

V druhé soustavě S' musí být rychlost vyjádřena **stejnou rovnicí** (viz první postulát), ale pomocí souřadnic této soustavy, tj. pomocí čárkovaných souřadnic :

$$\boxed{\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right) = (v'_x, v'_y, v'_z)}$$

Budeme nyní hledat převodní vztah mezi těmito rychlostmi, tj. **matematické transformace souřadnic** vektorů rychlostí v obou soustavách. V klasické fyzice se často používá název ***skládání rychlostí*** , neboť rychlost tělesa se jednoduše sčítá s unášivou rychlostí soustavy (vektorově).
Pro výpočet derivací souřadnic použijeme samozřejmě Lorentzovy transformace :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - u \cdot t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - u \cdot x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{aligned}}$$

Pomocí pravidla o derivaci složené funkce můžeme psát :

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt'}\ x'(t') = \frac{d}{dt'}\ x'\big(t(t')\big) = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dt'}{dt}}$$

Poslední úprava znamená, že nemusíme použít inverzní transformaci pro čas a postačí derivovat první a poslední transformační rovnici :

$$v'_x = \frac{dx/dt - u \cdot dt/dt}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \cdot \frac{1}{\frac{dt/dt - u/c^2 \cdot dx/dt}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}} = \frac{v_x - u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1 - v_x \cdot u/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}}$$

Po vykrácení odmocnin tedy dostaneme :

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x \cdot \frac{u}{c^2}}$$

Podobným způsobem, s opakovaným použitím Lorentzových transformací, vypočítáme další souřadnice :

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{1 - v_x \cdot u/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}} = v_y \cdot \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - v_x \cdot \frac{u}{c^2}}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{1 - v_x \cdot u/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}} = v_z \cdot \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - v_x \cdot \frac{u}{c^2}}$$

Pro rychlosti jednoho a téhož tělesa v různých inerciálních systémech tak dostáváme netriviální matematické vztahy, které vůbec nepřipomínají „obyčejné“ skládání rychlostí v klasické mechanice :

$$\boxed{\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - v_x \cdot \frac{u}{c^2}} \\ v'_y &= v_y \cdot \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - v_x \cdot \frac{u}{c^2}} \\ v'_z &= v_z \cdot \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - v_x \cdot \frac{u}{c^2}} \end{aligned}}$$

transformace rychlostí v teorii relativity

A obrácené vztahy dostaneme jako u Lorentzovy transformace pouhou změnou znaménka unášivé rychlosti :

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + u}{1 + v'_x \cdot \frac{u}{c^2}} \\ v_y &= v'_y \cdot \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + v'_x \cdot \frac{u}{c^2}} \\ v_z &= v'_z \cdot \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + v'_x \cdot \frac{u}{c^2}} \end{aligned}}$$

inverzní transformace rychlostí

Ačkoliv takové skládání rychlostí nesouhlasí s naší běžnou zkušeností (jako ostatně celá teorie relativity), je velmi důležité, že **v limitě pro malé rychlosti přecházejí tyto vztahy na klasické rovnice :**

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x \cdot \frac{u}{c^2}} \xrightarrow[u,v \to 0]{} v_x - u$$

$$v'_y = v_y \cdot \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-v_x \cdot \frac{u}{c^2}} \xrightarrow[u,v \to 0]{} v_y$$

$$v'_z = v_z \cdot \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-v_x \cdot \frac{u}{c^2}} \xrightarrow[u,v \to 0]{} v_z$$

Transformační vztahy se dále velmi zjednoduší za předpokladu, že se pohyb hmotného bodu děje ve směru osy x, tedy že vektor rychlosti má tvar :

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v,\ 0,\ 0)$$

Potom dostaneme :

$$\boxed{\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - v_x \cdot \frac{u}{c^2}} \\ v'_y &= 0 \\ v'_z &= 0 \end{aligned}}$$

transformace rychlosti (zjednodušená)

Ověřme si na závěr **platnost druhého postulátu** o konstantní rychlosti světla ve všech inerciálních soustavách. Nechť se elektromagnetická vlna, (tj. soubor částic zvaných ***fotony***) pohybuje rychlostí světla podél osy x :

$$\vec{c} = (c_x, c_y, c_z) = (c,\ 0,\ 0)$$

Velikost rychlosti v soustavě S se tedy přímo rovná x-ové souřadnici. Potom rychlost světla v soustavě S' bude také rovna příslušné souřadnici, ale čárkované :

$$c' = (c'_x) = \frac{c_x - u}{1 - c_x \cdot \frac{u}{c^2}} = \frac{c - u}{1 - c \cdot \frac{u}{c^2}} = \frac{c - u}{1 - \frac{u}{c}} = \frac{c - u}{\frac{c-u}{c}} = c$$

Postulát je tedy splněn (jak jinak).

D.cv. : Pokuste se dokázat totéž pro světlo postupující ve směru dalších souřadných os.

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 04/2005**

rev. 03/2007