Kinematika

Tato vědní disciplina popisuje a zkoumá pohyb hmotných těles, aniž ji zajímají příčiny tohoto pohybu.

Pojem hmotného bodu

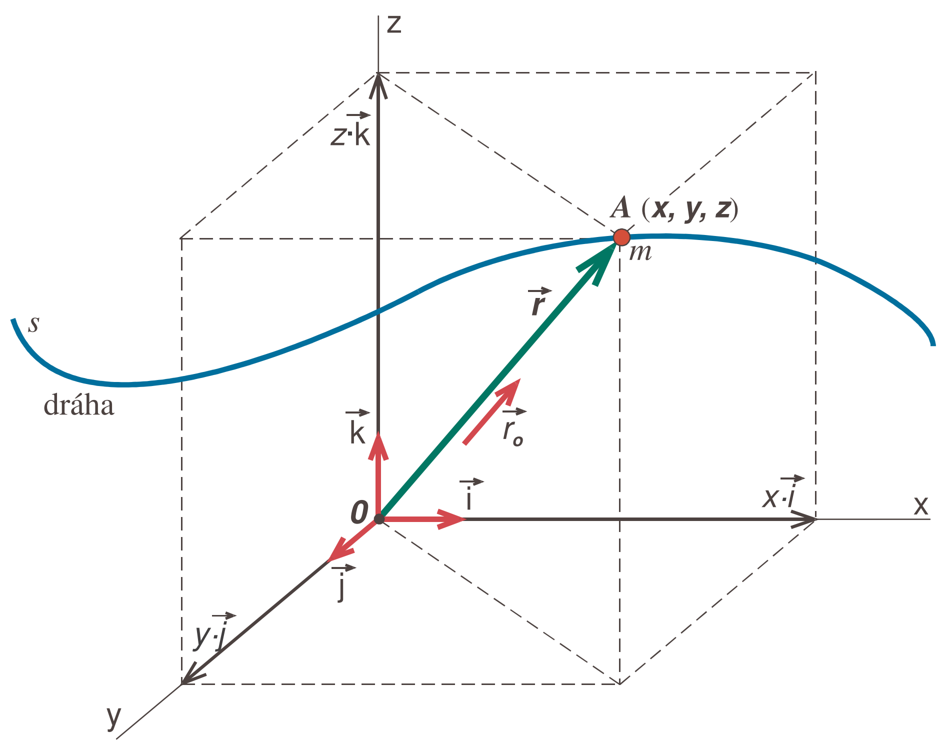
Název ***hmotný bod (bodové těleso)*** používáme pro modelový hmotný objekt (o hmotnosti m), jehož rozměry (objem) jsou zanedbatelně malé, matematicky nekonečně malé.

Zavedení polohového vektoru

Jestliže v dané kartézské soustavě souřadnic má hmotný bod okamžitou polohu (v čase t) :

$A = (x, y, z)$,

potom definujeme ***polohový vektor (průvodič)*** tohoto hmotného bodu jako vektor s počátečním bodem v počátku 0 soustavy souřadnic a s koncovým bodem v místě A hmotného bodu (viz obr.) :



Pro matematické vyjádření polohového vektoru pak můžeme využít libovolnou ze tří standardních možností zápisu vektorů, které znáte z matematické analýzy :

$$\boxed{\vec{r} = (x, y, z)}$$

zápis průvodiče pomocí souřadnic

$$\boxed{\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}}$$

zápis průvodiče pomocí složek

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_o \cdot r}$$

zápis průvodiče pomocí jednotkového vektoru

Pro výše použitý jednotkový vektor průvodiče platí rovněž známá vektorová rovnice :

$$\boxed{\vec{r}_o = \frac{\vec{r}}{r}}$$

jednotkový vektor průvodiče

A také velikost průvodiče musí být v souladu s obecnými vztahy pro vektory :

$$\boxed{|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

velikost průvodiče

V kinematice vždy sledujeme **pohyb** hmotného bodu po nějaké **dráze** s , hmotný bod tedy mění v průběhu času svoji polohu, mění se proto i jeho polohový vektor – potom všechny výše uvedené veličiny musí být jednoznačně definovány v každém časovém okamžiku - jsou to tedy **funkce času** (**vektorové** funkce, pouze v případě velikosti průvodiče funkce **skalární**).
Když pak dokážeme nalézt polohový vektor jako takovou funkci (a tento problém řeší dynamika) :

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

Znamená to vlastně nalezení parametrických rovnic dráhy pohybu :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}}$$

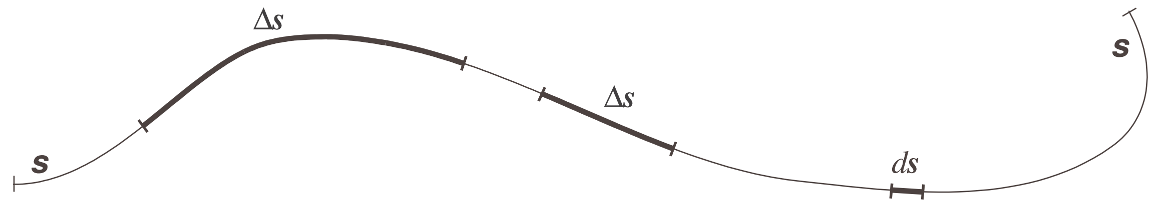
parametrické rovnice dráhy

To je první výhoda používání polohového vektoru hmotného bodu. Druhou a hlavní výhodou je však možnost „kompletně“ vyjádřit základní kinematické veličiny - rychlost a zrychlení pohybu - jako veličiny vektorové :

Připomeňme si ale nejprve, co znáte ze střední školy o **definici rychlosti** : Je to podíl velikosti (délky) Δs části dráhy (úseku, elementu dráhy, viz obr.) a času (časového intervalu) Δt , za který hmotný bod uvedenou dráhu urazí, tedy :

$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

Podíl těchto veličin lze dobře popsat jako dráhu proběhnutou za (zvolenou) jednotku času. Je to vlastně **slovní vyjádření** této veličiny *: **Rychlost je** (číselně) **rovna dráze** (velikosti, délce dráhy) **vykonané** (uražené, uběhnuté) **za jednotku času.***



Použitý symbol (Δ) u dráhy a času – velké řecké písmeno delta – se vždy používá k označení zvolené **části** nějaké veličiny (jinak řečeno **intervalu** , **úseku** , **elementu**).

U veličin, které jsou matematickými spojitými funkcemi, je pak vhodnější použít termín ***změna*** veličiny – případně ***přírůstek*** nebo ***úbytek*** této veličiny.

To je také případ délky vykonané dráhy, která je zřejmou (rostoucí) spojitou funkcí času :

$$\boxed{s = s(t)}$$

A proto její libovolná část (úsek) je přírůstkem této funkce za zvolený časový interval $\Delta t = t_2 - t_1$, tj. je rovna rozdílu hodnot funkce v koncovém a počátečním bodě tohoto časového intervalu :

$$\boxed{\Delta s = s(t_2) - s(t_1) = s_2 - s_1}$$

Nebo v poněkud obecnější formě, bez použití indexů :

$$\boxed{\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)}$$

Zvolená část veličiny – v našem případě úsek nějaké dráhy - může být libovolně velikou částí celé dráhy (a třeba i dráha celá). Pak ovšem vypočítaná rychlost je spojená s celým takto vybraným úsekem – je to ***průměrná rychlost*** na tomto úseku dráhy. (Například na stokilometrové dráze z Plzně do Prahy nás mohou zajímat průměrné rychlosti na úsecích délky několika kilometrů, desítek kilometrů, i na celé dráze.)

Pozn. : Písmeno ***s*** se tedy používá k označení proběhnuté délky dráhy, i k označení geometrické křivky této dráhy.

Veličina průměrná rychlost tedy hodnotí rychlost hmotného bodu na celém úseku dráhy Δs , ale vůbec nic nám neříká o „lokálním“ pohybovém stavu v jednotlivých menších úsecích této dráhy.

Pro detailní popis pohybu se proto zavádí další veličina - ***okamžitá rychlost*** - která má zřejmý smysl rychlosti v **daném čase** . V určitém časovém okamžiku je hmotný bod také na **určitém místě** dráhy, tj. v nějakém jejím bodě.

Pro výpočet takové rychlost pak ale jistě volíme co možná nejmenší část dráhy – o délce řádově metry, spíše však decimetry, centimetry, milimetry…..a potom musíme vydělit tuto dráhu příslušným časem potřebným k jejímu proběhnutí - ten bude určitě také velmi malý .

Abychom se přiblížili geometrické představě **bodu** dráhy, ve kterém určujeme rychlost - jako **nekonečně malého objektu** - měl by být zvolený úsek dráhy vlastně také **nekonečně malý**, tedy „prakticky“ nulový - stejně jako potřebný čas.

Nulové hodnoty ovšem do vztahu pro rychlost nemůžeme přímo dosadit, protože zlomek by neměl smysl - budeme se proto k nulové dráze a nulovému času tedy pouze přibližovat – a díky matematické analýze se k nim můžeme přiblížit nekonečně blízko .

Shrňme tyto úvahy :

Pro výpočet **okamžité rychlosti** použijeme stejný vzorec jako pro rychlost průměrnou, tj. bude to **podíl** části dráhy a času potřebného k jejímu vykonání. Do tohoto vzorce však budeme (myšlenkově) postupně dosazovat stále menší a menší úseky dráhy, co nejvíce se přibližující k nule (a příslušné časy, které se také budou blížit k nule). Výsledkem bude řada – **posloupnost** - hodnot rychlosti, které se budou přibližovat k nějaké **mezní hodnotě** - k naší požadované okamžité rychlosti.

Pro tuto mezní hodnotu se v matematice používá pojem ***limita*** a její hodnota (a podmínky procesu jejího vytváření) se formálně zapisuje standardním způsobem :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

V případě existence funkcí v čitateli a ve jmenovateli využijeme ovšem znalosti přírůstků těchto funkcí :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

Při tomto procesu přibližování k mezní, limitní hodnotě nabývají tedy části veličin v čitateli i jmenovateli zlomku velmi malé hodnoty. Nejsou přímo nulové, ale k nule se přibližují libovolně blízko – jsou to tzv. **nekonečně malé hodnoty** .

K pojmenování takové nekonečně malé části určité veličiny se pak používá matematického pojmu ***diferenciální (elementární) část*** (interval, úsek, veličina, element), nebo jednoduše ***diferenciál*** , zejména je-li tato veličina spojitou matematickou funkcí nebo její spojitou proměnnou.

K označení diferenciálů používáme písmeno d , někdy δ nebo ∂ a z předešlého textu je zřejmé, že mohou být také napsány jako limity :

$$ds = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s = \lim_{\Delta t \to 0} \left(s(t+\Delta t) - s(t)\right) = \lim_{t_2 \to t_1} \left(s(t_2) - s(t_1)\right)$$

$$dt = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t = \lim_{t_2 \to t_1} (t_2 - t_1)$$

Okamžitá rychlost bude tedy definována jako podíl diferenciálních částí (diferenciálů) dráhy a času :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}}$$

okamžitá rychlost (velikost)

Matematický postup přibližování se k limitní hodnotě podílu úseku dráhy a časového intervalu ale nic **nemění** na **smyslu** tohoto podílu – každý člen řady, i sama limita, má stále význam *velikosti (délce) dráhy proběhnuté za jednotku času*.

Tedy ***okamžitá rychlost*** hmotného bodu vyjádřená jako podíl diferenciálních částí dráhy a času má stejný smysl jako průměrná rychlost – je rovna **dráze (délce, velikosti dráhy) uražené za jednotku času** - ale je definována v **daném místě** dráhy, tj. v **daném čase**.

Výše jsme již uvážili, že délka vykonané dráhy je spojitou funkcí času a také nezávisle proměnná – čas – je samozřejmě ekvivalentní spojité funkci, proto je tato ***okamžitá rychlost*** podílem ***skutečných (úplných) diferenciálů*** (funkcí) a může být chápána jako ***časová změna (přírůstek)*** délky dráhy za jednotku času.

Pro **praktický výpočet** je potom nejdůležitější, že vytvořená definice okamžité rychlosti je současně také matematickou definicí ***derivace (délky) dráhy podle času*** :

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} s(t)}$$

Samozřejmě vím, že jsem předchozími řádky lehce znudil ty z vás, kteří už zcela běžně derivují a integrují, chtěl jsem ale zopakovat pro fyziku důležité pojmy jako přírůstek funkce a diferenciál , které dále použijeme u funkce vektorové, a chtěl jsem také zdůvodnit , proč fyzikové **derivaci** funkce často raději nahrazují **podílem diferenciálů** , který má **obecnější platnost** .

Už v termodynamice poznáte, že opravdu existují fyzikální veličiny, která jsou sice nekonečně malé, ale nejedná se o skutečné diferenciály funkcí - z jednoduchého důvodu, že příslušné funkce prostě neexistují. Takové je např. teplo dQ potřebné k (nekonečně) malému ohřátí plynu - nelze totiž najít funkci Q (stavových veličin plynu), která by popsala celkové ohřátí plynu, protože toto teplo závisí také na konkrétním termodynamickém procesu ohřevu. Při exaktním popisu se pro tuto veličinu používá také odlišné označení – δQ - je to tzv. ***neúplný diferenciál*** . Závěrem tedy shrneme :

Na formální znak derivace – tj. zlomek s diferenciálními veličinami - můžeme vždy pohlížet jako na skutečný podíl (skutečný zlomek) dvou (nekonečně) malých veličin, ale ne vždy se také jedná o matematickou derivaci.

Nyní se už podívejme, jak lze definovat okamžitou rychlost pomocí polohového vektoru :

Jde totiž o to, že okamžitá rychlost je typická fyzikální ***vektorová veličina*** - tj. má nejen ***velikost*** – tu jsme již stanovili - ale má také určitý ***směr*** (a orientaci).

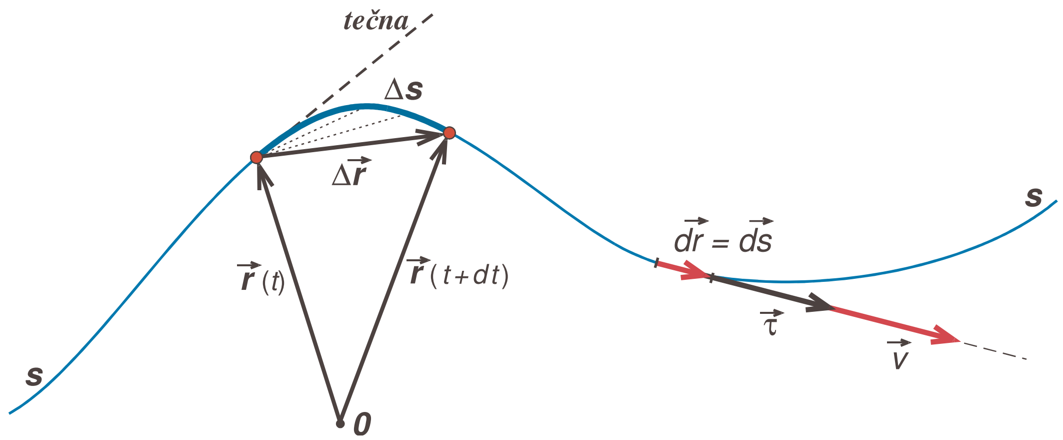
Veškerá lidská zkušenost s mechanickým pohybem nás přitom přesvědčuje, že (okamžitá) rychlost má vždy **směr tečny dráhy** v daném místě. Jak ale nalezneme její souvislost s polohovým vektorem hmotného bodu ?

Již při definici průvodiče jsme si uvědomili, že průvodič není nějaký konstantní vektor, ale že se jedná o **vektorovou funkci** času, neboť s hmotným bodem, pohybujícím se po nějaké dráze, se také současně pohybuje koncový bod tohoto vektoru.

Tak jako jsme výše definovali změnu „obyčejné“ skalární funkce pomocí rozdílu jejích hodnot v konečném a v počátečním bodě, můžeme stejně definovat **změnu (přírůstek) vektorové funkce** – našeho **polohového vektoru** – tato změna bude ovšem také vektorová veličina :

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1}$$ ***přírůstek (změna) průvodiče***

Následující obrázek nám ukazuje, že tento vektor je **sečnou** dráhy hmotného bodu mezi místy $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$.



Je zřejmé, že **délka sečny** je **velikostí tohoto vektoru** a že se přibližně rovná **délce části dráhy** mezi oběma uvažovanými místy :

$$\boxed{|\Delta\vec{r}| \doteq \Delta s}$$

Rovnost je tím lépe splněna, čím je sečna křivky kratší a zřejmě tedy platí přesně v limitě pro nekonečně malý časový interval Δt , kdy oba krajní body sečny splynou do jednoho bodu - sečna potom přejde na **tečnu křivky** v tomto bodě.

Pak se vektor přírůstku průvodiče blíží nule a vzniká vlastně diferenciál této vektorové funkce :

$$\boxed{d\vec{r} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r}}$$ ***diferenciál průvodiče***

Také je možno formálně napsat :

$$\boxed{d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}$$

V tomto mezním případě, kdy se sečna změní na tečnu, splývá diferenciál průvodiče s diferenciálním elementem dráhy a oba tvoří nekonečně malou **část dráhy** hmotného bodu - jejich velikosti jsou tedy shodné :

$$\boxed{|d\vec{r}| = ds}$$

A je také zřejmé, že oba tyto diferenciály jsou také **částí přímky** tečny – mohou být tedy zakresleny jako dvě (nekonečně malé) **shodné úsečky** – ale diferenciál průvodiče je navíc vektor, tj. orientovaná úsečka (ve směru pohybu hmotného bodu) - často se také nazývá **orientovaným elementem dráhy** a k jeho označení se může použít stejné písmeno, jako je označení křivky (s , někdy také l) :

$$\boxed{d\vec{r} = d\vec{s} = d\vec{l}}$$ ***orientovaný element*** ***(křivky)*** ***dráhy***

Tečna (a také normála) je v každém místě křivky jednoznačně definována (její výpočet je matematická záležitost), proto u dráhy hmotného bodu vždy můžeme počítat s existencí ***jednotkového tečného vektoru*** $\vec{\tau}$ (orientaci volíme ve směru pohybu, viz obr.), s jehož pomocí lze standardně vyjádřit diferenciál průvodiče – orientovaný element dráhy :

$$\boxed{d\vec{r} = |d\vec{r}| \cdot \vec{\tau} = ds \cdot \vec{\tau}}$$

Nyní se vrátíme k vektoru okamžité rychlosti , který rovněž leží na tečně dráhy , a lze ho tedy také vyjádřit pomocí jednotkového tečného vektoru křivky a známé velikosti okamžité rychlosti :

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

Jestliže je možno zacházet s derivací funkce jako s obyčejným podílem diferenciálů, proveďme tedy naznačené násobení :

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau} = \frac{ds \cdot \vec{\tau}}{dt}$$

Podle horní rovnice v rámečku však nyní vznikl v čitateli diferenciál průvodiče a dostáváme tak velmi efektní možnost přímé exaktní **definice vektoru okamžité rychlosti** pomocí průvodiče hmotného bodu :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$$ ***okamžitá rychlost*** *(vektor)*

Tento vektor tak obsahuje kompletní informaci o rychlosti pohybu hmotného bodu – jeho **velikost** je shodná se dřívější skalární definicí okamžité rychlosti (jako dráhy uražené za jednotku času), ale navíc má nyní **směr** tečny dráhy a jednoznačnou **orientaci** (ve směru pohybu hmotného bodu)

Okamžitá rychlost hmotného bodu jako **podíl diferenciálů** průvodiče a času může být chápána (ve shodě se smyslem podílu skalárních diferenciálů) jako **časová změna** průvodiče (za jednotku času), matematicky je to pak ***derivace průvodiče*** podle času.

Pozn. : Pro zkrácení zápisu se k formálnímu označení derivace někdy používá pouze čárka nad písmenem funkce, případně tečka , zejména jde-li o časovou derivaci :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Derivace vektoru (vektorové funkce) je stejně jako sám vektor **formální matematický výraz** , který konkrétně znamená derivaci všech souřadnic vektoru :

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

zápis vektoru rychlosti pomocí souřadnic

Případně zapsáno ***pomocí složek*** :

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}$$

Pozn. : Tento složkový zápis je teoreticky velmi významný – ukazuje, že libovolný **obecný křivočarý** pohyb (jeho rychlost) lze **rozložit** do tří jednoduchých pohybů, které se konají na souřadných osách, tj. do tří **přímočarých** pohybů – je to vlastně zdůvodnění ***principu skládání pohybů*** . Uvažme, že vlastně také element dráhy ($d\vec{r}$) se rozkládá na tři elementy na osách (dx, dy, dz) a na další stránce uvidíme, že totéž platí i pro zrychlení pohybu.

Zápis vektoru rychlosti pomocí jednotkového vektoru už známe - z něj jsme vlastně vycházeli :

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$$

zápis vektoru rychlosti pomocí jednotkového vektoru

kde $\vec{\tau}$ je jednotkový tečný vektor v daném místě dráhy a **velikost rychlosti** v je určena známým vztahem pro velikost vektoru :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

velikost vektoru rychlosti

A současně pro **velikost rychlosti** samozřejmě platí dříve odvozená skalární definice :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Analogickým způsobem , jako jsme definovali vektor okamžité rychlosti, můžeme dále definovat vektor okamžitého zrychlení hmotného bodu - tj. jako **časovou změnu** vektoru rychlosti :

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

okamžité zrychlení *(vektor)*

A stejně dobře lze popsat význam – slovní hodnocení - této veličiny : ***(okamžité) zrychlení je (číselně) rovno změně (přírůstku) rychlosti za jednotku času*** ***(v daném čase, v daném místě dráhy).***

Do definičního vztahu lze také hned dosadit předchozí vztah pro okamžitou rychlost :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

Nebo formálně :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}}$$

Analogické je také vyjádření vektoru zrychlení v ***souřadnicích*** a ***složkách*** :

$$\boxed{\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}) = (\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z) = (\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}) = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})}$$

$$\boxed{\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \dot{v}_x \cdot \vec{i} + \dot{v}_y \cdot \vec{j} + \dot{v}_z \cdot \vec{k} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k}}$$

A také jeho velikost :

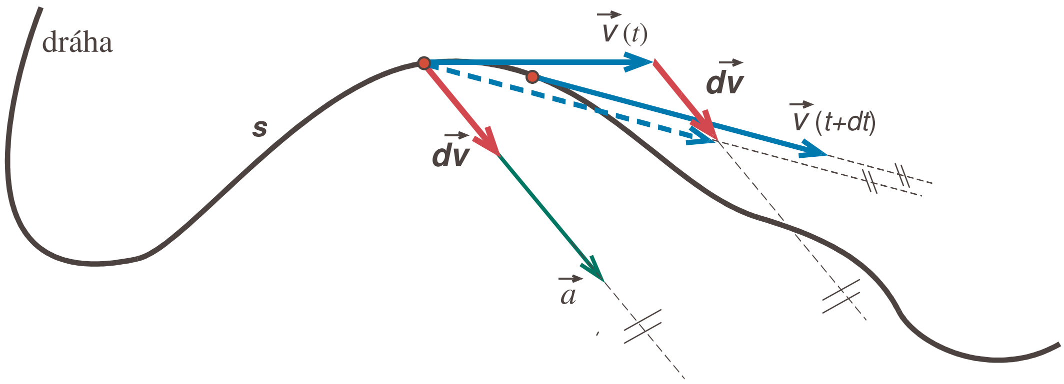
$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Je však vynechán zápis pomocí jednotkového vektoru, neboť určení směru tohoto vektoru, na rozdíl od směru rychlosti, již není triviální.

Směr vektoru zrychlení můžeme totiž vidět přímo z definice této veličiny (jako podílu diferenciálu rychlosti a diferenciálu času), kterou případně upravíme s využitím možnosti manipulovat s podílem diferenciálů jako s obyčejným zlomkem :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{dt} \cdot d\vec{v}$$

Tato vektorová rovnice nám říká, že směr zrychlení je dán směrem diferenciálu rychlosti , tj. změny (přírůstku) rychlosti - neboť násobení skalárem má vliv pouze na velikost vektoru a nemění jeho směr.



Jestliže si pak nakreslíme do obrázku přírůstek rychlosti jako <u>rozdíl vektorů rychlostí</u> ve dvou (nekonečně) blízkých bodech dráhy :

$$d\vec{v} = \vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)$$

a uvážíme-li různé možnosti <u>velikostí</u> a <u>směrů</u> těchto vektorů (v důsledku <u>nerovnoměrnosti</u> pohybu a různého možného <u>zakřivení</u> dráhy), pak je jistě zřejmé, že vektor okamžitého zrychlení může mít v prostoru zcela <u>libovolný směr</u>.

Protože u <u>dráhy</u> pohybu jako <u>geometrické křivky</u> lze v každém bodě vždy jednoznačně určit <u>***tečnu***</u> a <u>***normálu***</u> , provádí se velmi často <u>**rozklad vektoru**</u> zrychlení do těchto dvou směrů (v <u>rovině křivky</u> v daném místě, jinak v prostoru je nutno přidat třetí směr – <u>binormálu</u>).

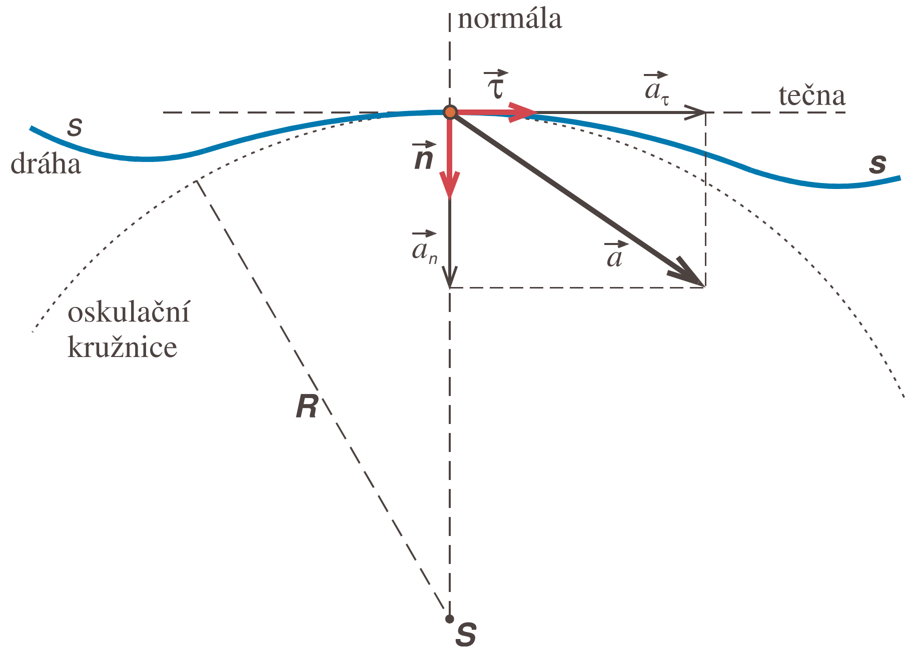
Jde vlastně o rozklad vektoru zrychlení do dvou <u>kartézských</u> os na tečnou a normálovou složku :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}}$$

<u>***rozklad vektoru zrychlení***</u>

$$|\vec{\tau}| = |\vec{n}| = 1$$

kde $\vec{\tau}$ je <u>**jednotkový tečný vektor**</u> (použitý již u vektoru rychlosti) a $\vec{n}$ je <u>**jednotkový normálový vektor**</u> (viz obr.)



Pro stanovení obou těchto složek zrychlení využijeme známý zápis rychlosti pomocí jednotkového tečného vektoru :

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$$

a vypočítáme zrychlení s využitím pravidla o derivaci součinu (které platí jak pro součin dvou skalárů (funkcí), tak i pro součin skaláru a vektoru a rovněž pro součin dvou vektorů, skalární i vektorový, jak se můžete sami přesvědčit rozepsáním vektorových výrazů do souřadnic) :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

První člen obsahuje jednotkový tečný vektor a skalární výraz - je to již tedy evidentně **tečná složka** zrychlení. Jasně přitom vidíme, že derivace velikosti rychlosti podle času neurčuje celé zrychlení, ale pouze tuto jednu složku.

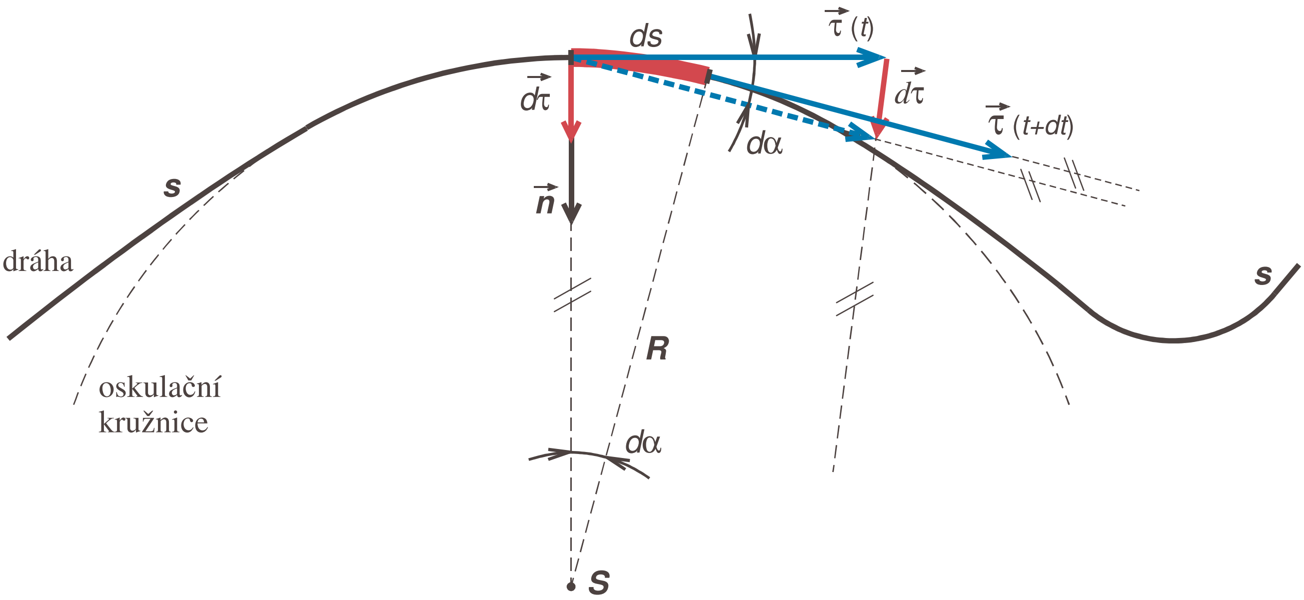
Upravujme dále druhý člen pomocí formálního pojetí jednotkového tečného vektoru jako složené funkce :

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(t) = \vec{\tau}(s(t))$$

Pak můžeme totiž použít pravidel o derivaci složené funkce :

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot v$$

Podívejme se nyní, jak vypadají tyto veličiny v libovolném místě dráhy hmotného bodu a jaký je jejich vztah k ***oskulační kružnici*** poloměru R :



S pomocí obrázku především uvažme, jaký směr má vektor $d\vec{\tau}$ - musí mířit právě do středu této oskulační kružnice, tj. má směr jednotkového normálového vektoru $\vec{n}$ křivky – proto tedy je možno vektor $d\vec{\tau}$ zapsat pomocí jeho velikosti a tohoto jednotkového vektoru :

$$d\vec{\tau} = d\tau \cdot \vec{n}$$

Ještě využijme stejného úhlu $d\alpha$ v podobných trojúhelnících vytvořených tečnými vektory a poloměry oskulační kružnice na počátku a konci časového intervalu dt (viz. obr.) :

$$d\varphi = \frac{d\tau}{1} = \frac{ds}{R}$$

Časovou změnu jednotkového tečného vektoru lze pak jednoduše vyjádřit :

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot v = \frac{d\tau\cdot\vec{n}}{ds}\cdot v = d\tau\cdot\frac{\vec{n}}{ds}\cdot v = \frac{ds}{R}\cdot\frac{\vec{n}}{ds}\cdot v = \frac{v}{R}\cdot\vec{n}$$

Tento výsledek dosadíme do výchozího vztahu pro zrychlení :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + v\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + v\cdot\frac{v}{R}\cdot\vec{n}$$

A v konečném tvaru :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\cdot\vec{n}}$$

rozklad vektoru zrychlení

Pro velikosti složek vektoru zrychlení tedy dostáváme :

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt}}$$

velikost tečné složky zrychlení *(„tečné zrychlení“)*

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$

velikost normálové složky zrychlení *(„normálové zrychlení“)*

Pomocí těchto složek pak také můžeme jednoduše vyjádřit velikost vektoru zrychlení, neboť to jsou kartézské složky :

$$\boxed{a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}}$$

velikost zrychlení

Z uvedených rovnic je zřejmé, že **zrychlení křivočarého pohybu není nikdy nulové**. I v případě rovnoměrného pohybu (tj. konstantní rychlostí v, jako např. rovnoměrný kruhový pohyb), kdy je sice tečné zrychlení rovno nule :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

je ale v důsledku zakřivení dráhy (existence poloměru křivosti R) vždy nenulové zrychlení normálové (dostředivé) , samozřejmě pokud je nenulová rychlost :

$$a_n = \frac{v^2}{R} \neq 0$$

A toto zrychlení pak určuje i celkové zrychlení (jeho velikost) :

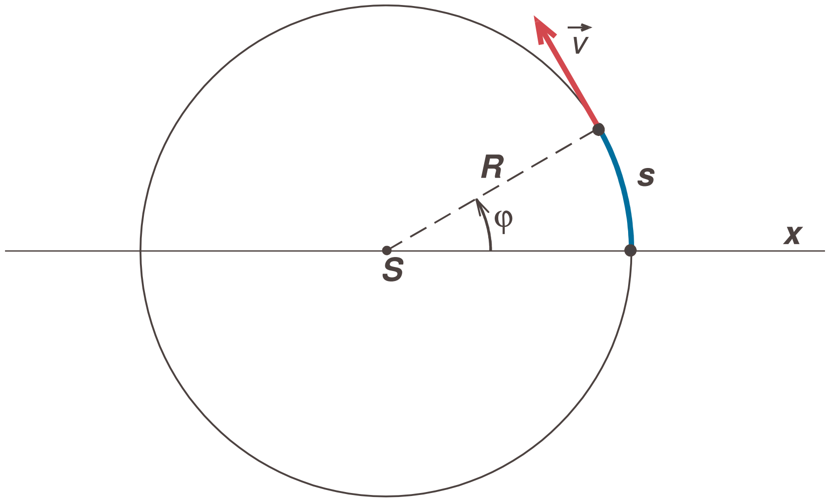
$$a = a_n = \frac{v^2}{R} \neq 0$$

Dále si blíže všimneme kruhového pohybu , jako speciálního případu pohybu křivočarého, velmi často využívaného v technických aplikacích i v teoretických úvahách :

Kruhový (rotační) pohyb

Aniž opět zkoumáme příčiny takového pohybu (v dynamice uvidíme, že na hmotný bod musí působit konstantní dostředivá síla), konstatujeme pouze, že dráhou hmotného bodu je kružnice o poloměru R se středem v nějakém bodě S .

K popisu kruhového pohybu pak většinou zavádíme ***úhlové veličiny*** (viz obr.) :



Využíváme přitom geometrické **definice úhlu** (v radiánech) pomocí dráhy s opsané (vykonané) na obvodu kružnice o poloměru R (kladný směr odečtu úhlu volíme standardně proti směru hodinových ručiček) :

$$\boxed{\varphi = \frac{s}{R} \qquad [rad] = [-]}$$

definice úhlu

která matematicky také znamená **jednoznačné přiřazení** (vztah) veličin vykonané dráhy s a úhlu φ opsaného průvodičem :

$$\boxed{s = R \cdot \varphi}$$

Tuto rovnici derivujme podle času, tj. derivujme její pravou i levou stranu :

$$\frac{ds}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Máme již nějaké zkušenosti s diferenciály, můžeme proto uvážit, že vzniklé časové změny dráhy a úhlu znamenají samozřejmě na jedné straně dráhu vykonanou na obvodu za jednotku času , tj. ***obvodovou rychlost*** v, která je zřejmě ekvivalentní obyčejné „dráhové“ okamžité rychlosti (skalární) a na straně druhé pak dostáváme úhel opsaný průvodičem za jednotku času , tj. ***úhlovou rychlost*** ω :

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$ ***obvodová rychlost***

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$$ ***úhlová rychlost***

Objevili jsme tak další jednoznačný vztah mezi dráhovými a úhlovými veličinami, nyní rychlostí :

$$\boxed{v = R \cdot \omega}$$

Tuto rovnici znovu derivujeme :

$$\frac{dv}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

Na levé straně vzniká známá veličina ***tečného zrychlení*** a_τ a na straně pravé je pak časová změna úhlové rychlosti, tj. ***úhlové zrychlení*** ε :

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt}}$$ ***tečné zrychlení***

$$\boxed{\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}}$$ ***úhlové zrychlení***

A máme třetí vztah pro dráhové a úhlové veličiny, tentokrát pro zrychlení :

$$\boxed{a_\tau = R \cdot \varepsilon}$$

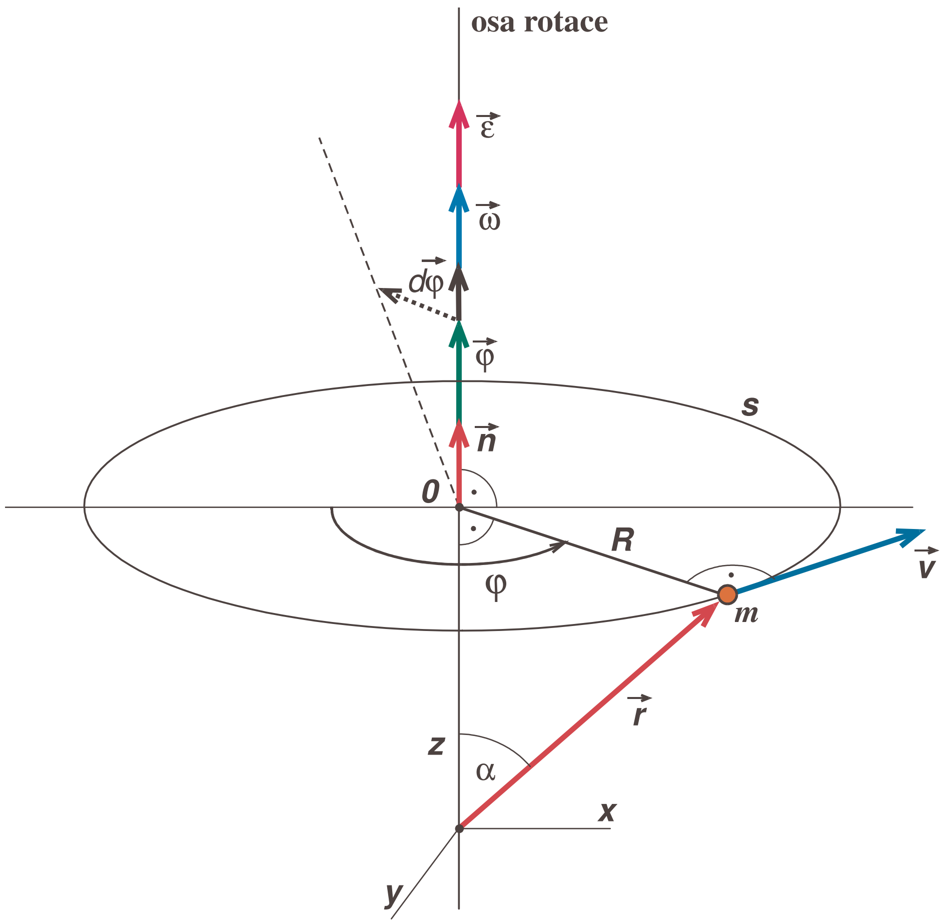
Jelikož lze i dostředivé zrychlení vyjádřit pomocí úhlové rychlosti :

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R \cdot \omega)^2}{R} = R \cdot \omega^2$$

znamená to, že kruhový (rotační) pohyb je úhlovými veličinami (φ, ω, ε) dostatečně popsán – tj. umíme z nich jednoznačně určit všechny dráhové veličiny (dráhu, rychlost a zrychlení – tedy vlastně pouze jejich velikosti s, v, a).

Uvažme ovšem, že dráhové veličiny jsou ale obecně ***vektory*** . Pak se naskýtá otázka, zda by bylo možno definovat vektorově také úhlové veličiny - v první řadě úhel opsaný průvodičem.

Základní podmínkou je zde jistě **nalezení směru** takového vektoru, který by bylo možno **jednoznačně přiřadit** tomuto úhlu, tj. vlastně i celému kruhovému (rotačnímu) pohybu. Tuto vlastnost má přímka procházející středem kruhové dráhy a kolmá k rovině pohybu, tj. ***rotační osa*** .



Jednotkový normálový vektor $\vec{n}$, kolmý k rovině rotace, definuje proto jednoznačně směr této osy a také hledaný **směr vektoru úhlu** - jeho **orientace** se potom standardně volí tak, aby z konce normálového vektoru bylo vidět pohyb po kružnici v kladném smyslu a jeho **velikost** pak jistě stanovíme rovnou (kladné) velikosti opsaného úhlu :

$$\left| \vec{\varphi} \right| = \left| \varphi \right|$$

Pro vektor úhlu tedy můžeme použít zápis pomocí jeho velikosti a jednotkového vektoru :

$$\boxed{\vec{\varphi} = \varphi \cdot \vec{n}}$$

vektor opsaného úhlu

Potom se i další úhlové veličiny stanou „automaticky“ vektorovými veličinami :

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}}$$ ***vektor úhlové rychlosti***

Před dalším krokem uvážíme, že směr vektoru úhlové rychlosti je určen směrem diferenciálu úhlu, tj. směrem přírůstku (změny) úhlu – to ale znamená **změnu směru osy rotace** - což je jistě velmi zásadní změna rotačního pohybu, která sice obecně může být skutečně jakákoliv , ale například u nesčíslného počtu rotujících strojních součástí s pevnými ložisky se v běžném provozu ani neočekává (různé hřídele, kola, turbiny, motory…).

To je jednoduchý případ tzv. ***pevné osy*** , která udržuje konstantní směr v prostoru a nepřipustí proto jinou možnost než $d\vec{\varphi} \parallel \vec{\varphi}$. Úhlová rychlost bude potom také ve směru osy rotace (a její orientace bude stejná jako orientace diferenciálu úhlu, tj. z konce vektoru bude vidět přírůstek úhlu v kladném smyslu) :

$$\boxed{\vec{\omega} \parallel \vec{\varphi}}.$$

Analogicky vypočítáme vektor úhlového zrychlení :

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$$ ***vektor úhlového zrychlení***

Jeho směr je opět jednoznačný pouze u **pevné osy** , kdy pak vlastně všechny úhlové veličiny budou ležet v jedné přímce – v ose rotace :

$$\boxed{\vec{\varepsilon} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{\varphi}}$$

Při rotačním pohybu hmotného bodu (i tělesa) se vždy snažíme umístit vztažnou **soustavu souřadnic** tak, aby její **počátek ležel na ose** rotace, přitom není nutné, aby byl přímo ve středu kruhového pohybu (viz. obr.) :

Pak lze totiž popsat vztah mezi dráhovými a vektorovými veličinami skutečně jednoduchými, hezkými rovnicemi, jak laskavý čtenář dále nahlédne.

Vyjádřeme nejprve poloměr kruhového pohybu hmotného bodu (viz. obr.):

$$R = r \cdot \sin\alpha$$

Potom pro obvodovou rychlost dostaneme :

$$v = R \cdot \omega = r \cdot \sin\alpha \cdot \omega$$

To je ale velikost vektorového součinu a vektor rychlosti tak může být vyjádřen vztahem (zkontrolujte na obrázku směr vektoru) :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$ ***obvodová rychlost***

Dále vypočítáme vektor zrychlení jako derivaci tohoto výrazu, s využitím znalosti derivace součinu a známých výrazů pro úhlové zrychlení a obvodovou rychlost :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Uvážíme-li podle obrázku směry výsledných vektorů, dostáváme vlastně rozklad vektoru zrychlení na tečnou a normálovou složku (psát závorku není nutné, jestliže přijmeme dohodu, že postupné matematické operace se konají zprava doleva) :

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}}$$ ***tečné zrychlení***

$$\boxed{\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}}$$ ***normálové zrychlení***

Opět vidíme, že u kruhového rovnoměrného pohybu, který má konstantní obvodovou i úhlovou rychlost, je tečné zrychlení nulové :

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} = 0$$

A celkové zrychlení je určeno pouze zrychlením normálovým (dostředivým) :

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{v^2}{R}\cdot\vec{n} \neq 0$$

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 02/2006**

rev. 02/2007

Dynamika hmotného bodu

Dynamika zkoumá pohyb (hmotného bodu a reálných těles) v souvislosti s jeho příčinami – silami, které mají původ ve vzájemném působení mezi hmotnými objekty.

Základem dynamiky a vlastně celé klasické mechaniky jsou ***Newtonovy zákony*** (1687):

1) Zákon setrvačnosti

Těleso setrvává v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém, pokud není nuceno působením okolních těles tento svůj stav změnit

Tato jednoduchá věta obsahuje závažná a principiální tvrzení :

- Konstatování **klidu nebo pohybu** rovnoměrného přímočarého je vlastně výsledkem hodnocení rychlosti tělesa, která – jak víme – musí být stanovena pomocí polohového vektoru, definovaného v nějaké soustavě souřadnic. Pojem klidu nebo pohybu tak závisí na **volbě** soustavy souřadnic – je tedy ***relativní***. Z hlediska zákona setrvačnosti jsou pak klid a pohyb rovnoměrný přímočarý zcela **ekvivalentní** - což je v dobrém souladu s tím, že oba tyto stavy jsou vlastně popsány **konstantním vektorem rychlosti** (v klidu nulovým)

- Protože platí princip skládání pohybů (blíže viz další kapitola), je zřejmé, že kdyby konstatování takového pohybu nebo klidu nějakého tělesa platilo současně ve dvou vztažných soustavách, tj. v obou soustavách by těleso mělo konstantní vektor rychlosti, pak by vzájemný pohyb soustav musel být také popsán konstantním vektorem rychlosti – byl by to tedy také rovnoměrný přímočarý pohyb. **Takové soustavy souřadnic** , kdy se jedna vůči druhé pohybuje **rovnoměrným přímočarým** pohybem , se nazývají ***inerciální*** a zákon setrvačnosti vlastně také tvrdí, že tyto soustavy **existují** .

- **Působení jiného tělesa** (okolního) na těleso sledované – to je vlastně obecná ***definice síly*** .

- Je proto možno konstatovat, že v **klidu** nebo v pohybu **rovnoměrném přímočarém** nepůsobí na těleso **žádná síla** (tedy **nulová síla** – tomu je ale matematicky ekvivalentní stav, kdy na těleso působí více sil , ale mají **nulovou výslednici** - jejich účinky se pak navzájem vyrovnávají, je to tzv. „ rovnovážný stav tělesa“)

- Jakmile začne síla (okolní tělesa) působit, nastane **změna stavu** (pohybového = dynamického) tělesa - a to je tedy **výsledek působení síly** (doposud konstantní vektor rychlosti tělesa se začne měnit - tím vznikne nenulové zrychlení – o jeho velikosti pak pojednává následující zákon síly).

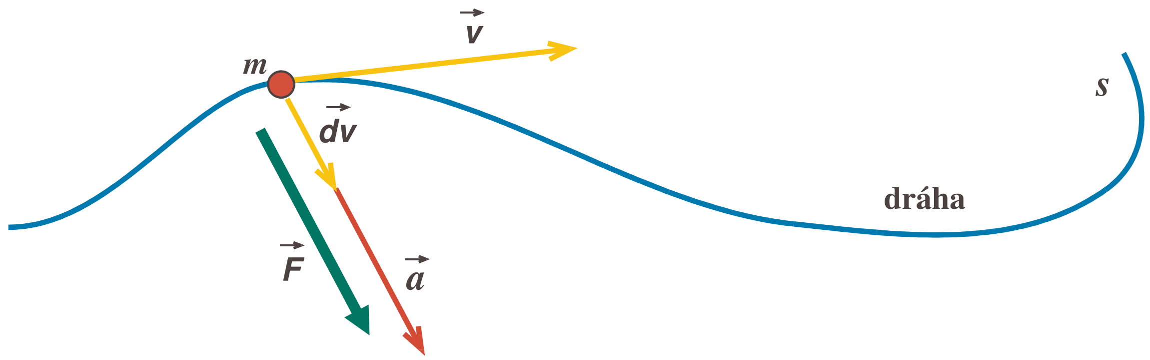
Newton se domníval, že existuje nějaká význačná, <u>základní inerciální vztažná soustava</u> souřadnic – ***absolutní prostor*** , který je základní podmínkou, předpokladem všech (mechanických) dějů. Newton také předpokládal existenci ***absolutního času*** , stejně rovnomětně plynoucího ve všech soustavách.

2) *Zákon síly (pohybová rovnice)*

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

Slovní vyjádření : ***Okamžité zrychlení tělesa je přímo úměrné působící síle*** *(a nepřímo úměrné setrvačné hmotnosti tělesa).*

Protože se jedná o úměru vektorových veličin, znamená tento vztah nejen skutečnou přímou úměru velikosti zrychlení a velikosti působící síly, ale také **stejný směr a orientaci** těchto veličin (viz obr.).



Při působení síly tedy těleso (hmotný bod) v souladu s prvním zákonem změní svůj pohybový stav – z pohybu rovnoměrného přímočarého na **pohyb zrychlený**. Protože velikost a směr působící síly mohou být obecně jakékoliv – bude takové i odpovídající zrychlení pohybu. Libovolná bude tedy i změna rychlosti v daném místě dráhy, což znamená nejen změnu velikosti rychlosti ale i změnu jejího směru – tj. změnu tečny dráhy. Působící síla proto může vytvořit jakýkoliv **nerovnoměrný křivočarý** pohyb.

Pozn. : Z minulé kapitoly víme, že se mechanické pohyby jednoduše skládají (sčítají se jako vektory), proto se stejně jednoduše také **skládají síly** – jednoznační původci těchto pohybů.

Pohybová rovnice je rovnicí ***vektorovou*** , tj. je to formální matematický vztah, který se při konkrétním výpočtu musí rozepsat do vektorových souřadnic:

$$F_x = m \cdot a_x = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$F_y = m \cdot a_y = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$F_z = m \cdot a_z = m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}$$

Nebo zjednodušeně pomocí formálního zápisu derivací :

$$\boxed{\begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= F_x \\ m \cdot \ddot{y} &= F_y \\ m \cdot \ddot{z} &= F_z \end{aligned}}$$

pohybové rovnice

Dostáváme tedy tři skalární rovnice. Jsou to ***parciální diferenciální rovnice 2. řádu*** s nenulovou pravou stranou. Pro jejich řešení je nutno zadat působící sílu (souřadnice) a hmotnost tělesa.
Výsledkem jejich řešení pak budou souřadnice průvodiče jako funkce času , tedy vlastně parametrické rovnice dráhy hmotného bodu :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}}$$

parametrické rovnice

Z nich - jak víme z minulé kapitoly – je pak možno stanovit **všechny kinematické veličiny** pohybu hmotného bodu. Sestavení a vyřešení pohybových rovnic je proto **základním úkolem dynamiky** .

Konkrétní řešení výše uvedených diferenciálních rovnic závisí samozřejmě na matematickém tvaru pravých stran – tj. na působící síle - a může být **velmi komplikované** (stačí si představit např. obyčejnou brzdicí sílu, která je v různých případech (vzájemné tření dvou pevných těles, tření pevného tělesa s kapalinou, s plynem) úměrná různým mocninám rychlosti).

Jako **jednoduchou aplikaci** si v následujících řádcích ukážeme řešení pohybových rovnic v případě **konstantní síly** působící ve směru pohybu hmotného bodu :

Konstantní velikost a neměnný směr a má pak podle pohybové rovnice také zrychlení i změna rychlosti hmotného bodu – vzniká proto **přímočarý, rovnoměrně zrychlený pohyb** . Jestliže položíme přímku dráhy s například do osy x , můžeme vektory síly a průvodiče zapsat následovně :

$$\vec{F} = (F_x , 0 , 0) = (F , 0 , 0)$$

$$\vec{r} = (x , 0 , 0) = (s , 0 , 0)$$

Stejný směr osy x mají potom i vektory rychlosti a zrychlení :

$$\vec{v} = (v_x , 0 , 0) = (v , 0 , 0)$$

$$\vec{a} = (a_x , 0 , 0) = (a , 0 , 0)$$

A ze tří pohybových rovnic je nenulová pouze jediná, pro x-ové souřadnice :

$$\boxed{m \cdot \ddot{x} \;=\; F_x}$$

Pomocí výše uvedeného zápisu souřadnic můžeme obě strany této rovnice napsat :

$$m \cdot \ddot{x} \;=\; m \cdot a \;=\; m \cdot \frac{dv}{dt} \;=\; m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} \;=\; F_x \;=\; F$$

V tomto **nejjednodušším** možném případě, kdy pohybová rovnice neobsahuje **žádné další derivace** souřadnic, můžeme provést její vyřešení **postupnou přímou integrací** : z rovnice lze totiž ihned stanovit konkrétní velikost zrychlení :

$$a \;=\; \frac{F}{m} \;=\; konst.$$

A protože zrychlení je derivace rychlosti :

$$a \;=\; \frac{dv}{dt}$$

Můžeme zpětně přejít k rychlosti obráceným postupem – pomocí **neurčitého integrálu** (tzv. primitivní funkce, nezapomeneme přitom přičíst možnou konstantu) :

$$v \;=\; \int a \;+\; C_1$$

Protože zrychlení je konstantní, můžeme ho z integrálu vytknout a zbylý integrál z jedničky je roven proměnné (tj. času) v první mocnině :

$$v \;=\; \int a \;+\; C_1 \;=\; a \cdot \int 1 \;+\; C_1 \;=\; a \cdot t \;+\; C_1$$

Tento vztah pro rychlost hmotného bodu (při přímočarém, rovnoměrně zrychleném pohybu) platí zcela obecně – jeho **integrační konstanta** pak umožňuje „přizpůsobit“, specifikovat tuto rychlost pro jakékoliv konkrétní podmínky pohybu - tzv. **okrajové podmínky** řešené úlohy :

Nejčastěji se používají **počáteční podmínky** pohybu, kdy stanovíme pro počátek sledované dráhy konkrétní hodnoty všech proměnných veličin :

- **počáteční čas** t_o (většinou volíme nulový , tj. $t = 0$, což je výhodné, ale není to nezbytné)
- **počáteční rychlost** hmotného bodu v_o , tj. rychlost v počátečním čase : $v_o \;=\; v\,(\,t_o\,)$
- **počáteční dráhu** hmotného bodu s_o , tj. dráhu v počátečním čase . $s_o \;=\; s\,(\,t_o\,)$

Pozn. : Je zřejmé, že takto může být zadáno i jakékoliv jiné místo dráhy a že v obecném trojrozměrném případu půjde o stanovení vektoru rychlosti a průvodiče tohoto místa dráhy.

Integrační konstantu pak určíme tím způsobem, že počáteční podmínky (použijme nulový počáteční čas) dosadíme do obecného vztahu :

$$v_o = a \cdot 0 + C_1$$

Dostáváme ihned :

$$C_1 = v_o$$

A vzniká nám tak známý středoškolský vztah pro rychlost rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu :

$$\boxed{v = a \cdot t + v_o}$$

rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu

Pozn. : Naše pohybová rovnice je vhodná i pro ukázku řešení diferenciálních rovnic **metodou separace proměnných** (oddělení proměnných veličin) :

Použijeme výchozí vztah pro zrychlení jako derivaci času :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Rovnici vynásobíme diferenciálem času (a případně přehodíme strany) :

$$dv = a \cdot dt$$

Tím jsme dosáhli stavu, že na levé straně rovnice je pouze funkce (závisle) proměnné – rychlosti v a na druhé straně je pouze funkce (nezávisle) proměnné – času t, přičemž levá strana (a tedy i jí rovná strana pravá) má fyzikální význam **diferenciálního přírůstku** (velikosti) rychlosti za čas (časový interval) dt.

Vždy, když u diferenciální rovnice dokážeme oddělit proměnné veličiny, pokračujeme v řešení tak, že uděláme **určitý integrál** levé i pravé strany. Z matematické analýzy byste měli vědět, že tento matematický úkon vytvoří v definovaných mezích (limitní) součet integrované veličiny – na levé i pravé straně rovnice – a rovnost zůstane zachována, přitom v našem případě má výsledek i jasný význam : když integrujeme – sčítáme – (diferenciální) přírůstky rychlosti, dostaneme **celkový přírůstek** rychlosti (na nějakém úseku dráhy hmotného bodu).

Právě separace proměnných pak umožňuje, aby každý integrál - na levé i pravé straně rovnice - měl pouze **jedinou integrační proměnnou** a aby v této proměnné byl také vyjádřen **integrační obor** – tj. uvažovaný úsek dráhy hmotného bodu.

Nezanedbatelnou **výhodou** této metody je také to, že když se při definování **integračních mezí** použijí okrajové podmínky pohybu, ihned se tím „automaticky“ stanoví i integrační konstanty :

Konkrétně v našem případě je na pravé straně integrační proměnnou čas - uvážíme tedy, že se při pohybu hmotného bodu na sledovaném úseku dráhy bude měnit od počátečního času t_o (to bude **dolní mez** integrálu, v našem případě nula) do nějakého konečného času t (**horní mez** integrálu), který považujeme za libovolný, obecný, a proto k němu nepíšeme žádný index (vzniká tím sice formální chyba - že je konkrétní hodnota horní meze integrálu označena stejně jako integrační proměnná – správněji bychom tedy měli horní mez nazvat např. t_1 a teprve na závěr v diskusi prohlásit, že ji považujeme za libovolnou veličinu a proto ji přeznačíme na t - ale tímto zkráceným postupem zrychlíme náš výpočet.)

Na levé straně pak je integrační proměnnou rychlost hmotného bodu, která se bude měnit od počáteční hodnoty v_o do konečné rychlosti v (a děláme stejnou formální chybu v označení horní meze, ale opět tím šetříme čas) :

$$\int_{v_o}^{v} dv = \int_{0}^{t} a \cdot dt$$

Jak známo, k výpočtu určitého integrálu také potřebujeme primitivní funkci (tj. neurčitý integrál integrované veličiny), do které postupně dosadíme horní a dolní mez integrační proměnné a výsledky odečteme – což se formálně zapisuje jako :

$$[\, v \,]_{v_o}^{v} = a \cdot [\, t \,]_0^t$$

Po dosazení na obou stranách potom dostaneme :

$$v - v_o = a \cdot (t - 0)$$

Nakonec tedy vzniká stejná rovnice, jako u přímé integrace :

$$\boxed{v = a \cdot t + v_o}$$

Dále pokračujeme analogickým způsobem :

Protože nyní již známe rychlost pohybu a je to derivace dráhy podle času :

$$v = \frac{ds}{dt} = a \cdot t + v_o$$

Můžeme dráhu vypočítat jako integrál této rychlosti (opět neurčitý integrál a další integrační konstanta) :

$$s = \int v + C_2 = \int (a \cdot t + v_o) + C_2$$

Integrál součtu je součet integrálů a integrované funkce jsou velmi jednoduché :

$$s = \int (a \cdot t + v_o) + C_2 = \int a \cdot t + \int v_o + C_2 = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_o \cdot t + C_2$$

Integrační konstantu pak opět stanovíme tím způsobem, že do vzniklého obecného vztahu dosadíme okrajové podmínky (v našem případě dosadíme počáteční dráhu v počátečním čase – nulovém) :

$$s_o = \frac{1}{2} a \cdot 0^2 + v_o \cdot 0 + C_2$$

Řešením je :

$$C_2 = s_o$$

A dostáváme vztah pro dráhu rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu :

$$\boxed{s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_o \cdot t + s_o}$$

dráha rovnoměrně zrychleného pohybu

Pozn. : Opět lze použít metodu separace proměnných : napíšeme výchozí vztah pro rychlost jako derivaci dráhy :

$$\frac{ds}{dt} = a \cdot t + v_o$$

Rovnici vynásobíme diferenciálem času :

$$ds = (a \cdot t + v_o) \cdot dt$$

A tím jsme opět dosáhli stavu, že na levé straně rovnice je pouze funkce (závisle) proměnné – dráhy s a na druhé straně je pouze funkce (nezávisle) proměnné – času t , přičemž obě strany rovnice mají smysl – tentokrát diferenciálního přírůstku dráhy za čas dt .

Dále opět uděláme určitý integrál obou stran – na každé straně tak dostaneme celkovou délku uběhnuté dráhy a rovnost se nezmění. Integrační konstantu opět vytvoříme při stanovení integračních mezí :

Na pravé straně je integrační proměnná čas a bude se měnit od nuly do libovolné hodnoty t , na levé straně pak je integrační proměnnou dráha , která bude narůstat od počáteční hodnoty s_o do konečné velikosti s :

$$\int_{s_o}^{s} ds = \int_{0}^{t} (a \cdot t + v_o) \cdot dt$$

Meze integrálů opět dosazujeme do primitivních funkcí

$$[\, s \,]_{s_o}^{s} = \left[\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_o \cdot t \right]_0^t$$

Dostaneme :

$$s - s_o = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_o \cdot t - (\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot 0^2 + v_o \cdot 0)$$

A vzniká samozřejmě stejná rovnice jako přímou integrací :

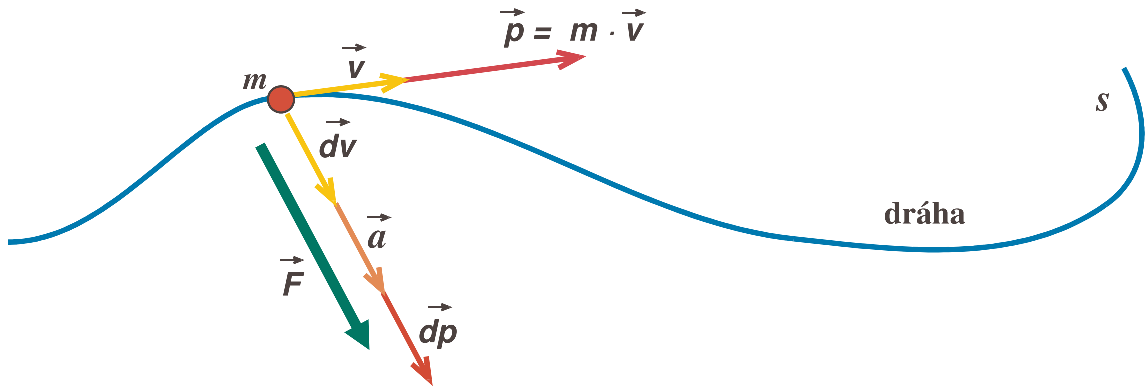
$$\boxed{s = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_o \cdot t + s_o}$$

Pohybové rovnice budete také probírat na cvičení a s některými dalšími standardními způsoby řešení diferenciálních rovnic se ještě seznámíte koncem semestru v tématu „Kmity a vlnění“.

Nyní dále pokročíme ve výkladu druhého Newtonova zákona : Často je výhodné místo rychlosti používat obecnější veličinu, která závisí i na hmotnosti a která tedy „kompletněji" popisuje pohybový stav tělesa (hmotného bodu) :

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$

hybnost (hmotného bodu)



Pro časovou změnu této veličiny platí (rovnici derivujeme) :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

Protože jsme tím dostali pravou stranu pohybové rovnice – je zřejmé, že s využitím vektoru hybnosti můžeme tedy napsat ***zákon síly*** ve formálně jednodušším tvaru :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

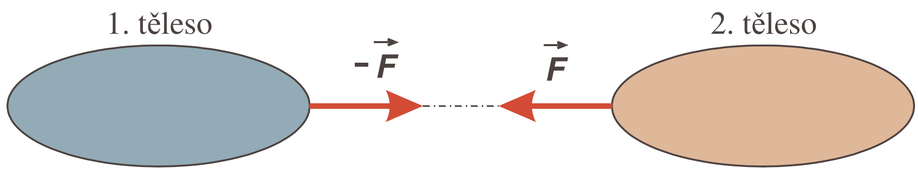
zákon síly *(druhý tvar)*

Slovní vyjádření : ***časová změna hybnosti je rovna*** *(je úměrná)* ***působící síle*** .

Je to i původní Newtonova formulace 2. zákona a je velmi pozoruhodné, že tento tvar pohybové rovnice **platí** i ve speciální teorii relativity (na rozdíl od předchozího „technického" tvaru pohybové rovnice, používajícího veličinu zrychlení).

3) Zákon akce a reakce

Jestliže jedno těleso působí na druhé těleso nějakou silou ($\vec{F}$) , pak také současně působí druhé těleso na první těleso silou stejně velikou, ale opačně orientovanou ($-\vec{F}$).



Tento zákon nám např. vysvětluje, proč těleso na podložce nemění svůj pohybový stav (zůstane v klidu), i když na něj působí gravitační síla.. Obecně ovšem <u>nezáleží</u> na tom, jestli jsou tělesa v „<u>dotyku</u>“, nebo na sebe působí <u>„na dálku“</u>.

<u>Zásadní důležitosti</u> pak nabývá tento zákon při popisu <u>soustav hmotných bodů</u> a reálných <u>těles</u> (řeší problém vnitřních sil).

Uveďme dále pro ilustraci několik ***<u>praktických a zajímavých sil</u>*** :

1) <u>Tíha tělesa</u>

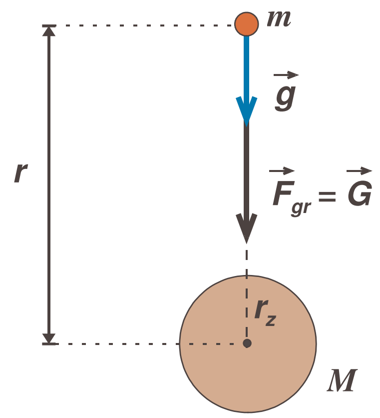
Se znalostí pohybové rovnice:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

nyní dobře chápeme název ***<u>zemské tíhové zrychlení</u>*** pro <u>gravitační tíhovou konstantu</u> g, a i možnost vektorového zápisu tíhové síly tělesa :

$$\boxed{\vec{G} = m \cdot \vec{g}}$$

<u>tíha tělesa</u>



Přitažlivá síla Země musí ovšem splňovat gravitační zákon (uveďme zatím jen známý skalární tvar, vektorově později) :

$$G = F_{gr} = \kappa \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \kappa \cdot \frac{M}{r^2}$$

Porovnáním s předchozím vztahem pro tíhu dostaneme vztah pro zemské tíhové zrychlení a můžeme také vypočítat jeho velikost na povrchu Země, když dosadíme hodnoty gravitační konstanty, hmotnosti a poloměru Země :

$$g = \kappa \cdot \frac{M}{r^2} = \kappa \cdot \frac{M}{r_z^2} \approx 9{,}81\ m / s^2$$

2) ***Dostředivá síla***

Víme již, že celkové zrychlení hmotného bodu lze vyjádřit pomocí tečné a dostředivé složky :

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Když tento vztah dosadíme do pohybové rovnice :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot (\vec{a}_\tau + \vec{a}_n) = m \cdot \vec{a}_\tau + m \cdot \vec{a}_n = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$$

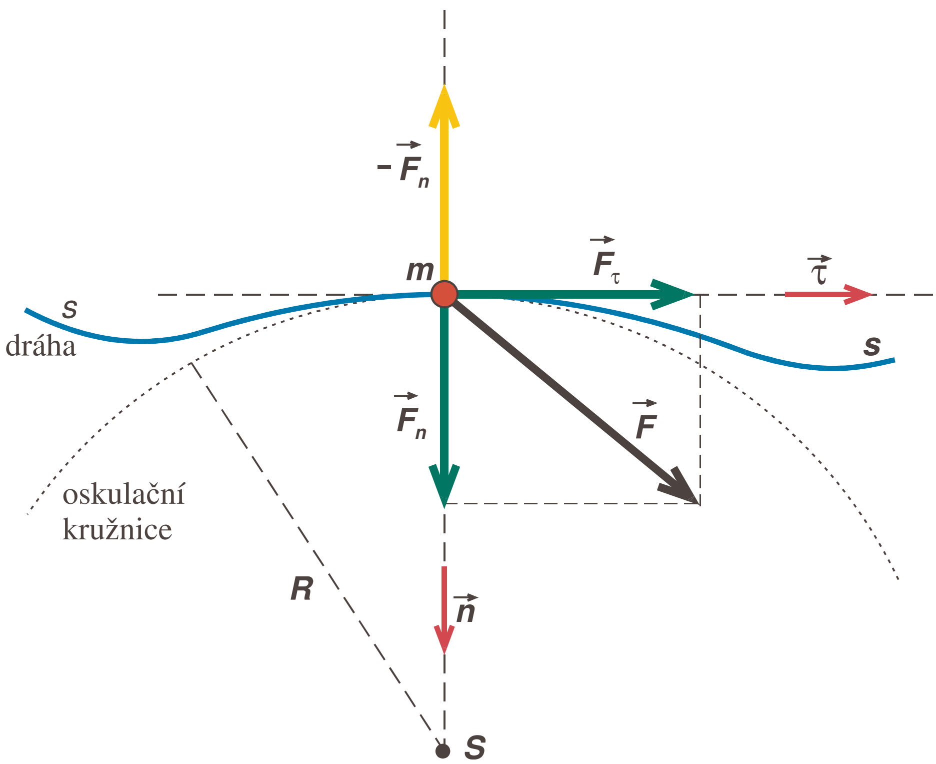
Vzniknou také **dvě složky síly** , složka (síla) ***tečná*** a ***normálová*** (nebo také ***dostředivá***, protože směřuje do středu křivosti dráhy). Zatímco první z nich může být u křivočarého pohybu i nulová (rovnoměrný pohyb), síla dostředivá je vždy nenulová :

$$\boxed{\vec{F}_\tau = m \cdot \vec{a}_\tau = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}}$$

tečná síla

$$\boxed{\vec{F}_n = \vec{F}_d = m \cdot \vec{a}_n = m \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}}$$

dostředivá síla



Nebo vyjádříme jen velikosti těchto sil :

$$\boxed{F_\tau = m \cdot a_\tau = m \cdot \frac{dv}{dt}}$$

$$\boxed{F_n = F_d = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{R}}$$

Vidíme, že **<u>tečná</u>** síla určuje pouze <u>změnu velikosti</u> rychlosti, aniž mění její směr), zatímco síla **<u>dostředivá</u>** pak „formuje" křivku dráhy – pravá rovnice jasně ukazuje jak se v závislosti na velikosti této síly (při dané hmotnosti a rychlosti) <u>vytvoří</u> odpovídající <u>poloměr křivosti</u> dráhy pohybu.

Velmi často je dostředivá síla realizována jako síla tzv. ***<u>vazby</u>*** (např. kolejnice u vlaku, závěs kyvadla).

3) <u>Odstředivá síla</u>

Tento termín se používá ve dvou případech :

- jako název pro **<u>reakci</u>** k dostředivé síle (je to síla, kterou působí těleso např. na svůj závěs)
- jako název pro ***<u>setrvačnou sílu</u>*** v <u>ne</u>inerciální soustavě (viz dále)

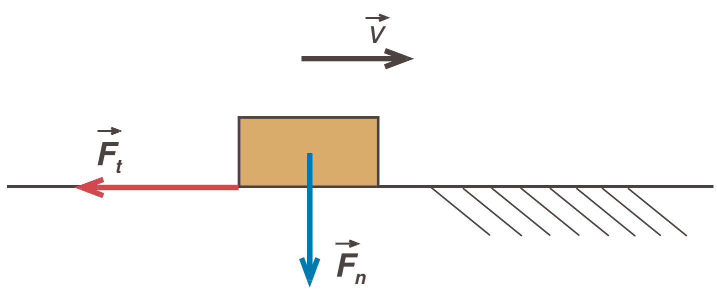
4) <u>Pružná síla</u>

Tato síla vzniká a působí v první fázi ***<u>deformace</u>*** reálných těles, kterou můžeme považovat za zvláštní „jednorázový" pohyb tělesa , a která končí buď **<u>destrukcí</u>** tělesa, či **<u>klidovým stavem</u>** zdeformovaného tělesa (v rovnováze s vnější působící silou), nebo mohou také vzniknout periodické pohybové stavy tělesa – ***<u>kmity a vlnění</u>*** (budeme probírat později).

5) <u>Třecí síla</u>

Je velmi zvláštní druh síly působící pouze mezi **<u>vzájemně se dotýkajícími</u>** tělesy, který má často zásadní význam v technických aplikacích. Tato síla vždy působí <u>proti směru</u> (možného) pohybu styčné plochy, spolupůsobí při změnách pohybového stavu těles, ale sama o sobě <u>nikdy pohyb nevytváří</u>. Její velikost v častém případě **<u>smykového tření</u>** závisí na kolmé síle $\vec{F}_n$ působící na styčné plochy, také na materiálu a struktuře těchto ploch (to vyjadřuje koeficient tření f), případně na pohybovém stavu :

$$\boxed{F_t = f \cdot F_n}$$



Shrnutí : Pojmem **síla** tedy podle 1. Newtonova zákona označujeme vzájemné reálné (skutečné) působení jednoho tělesa na těleso druhé. Výsledkem tohoto působení – účinkem síly – je změna pohybového stavu tělesa podle 2. Newtonova zákona (vlastně obou těles, viz 3. Newtonův zákon) – to je tedy **pohybový účinek** síly .

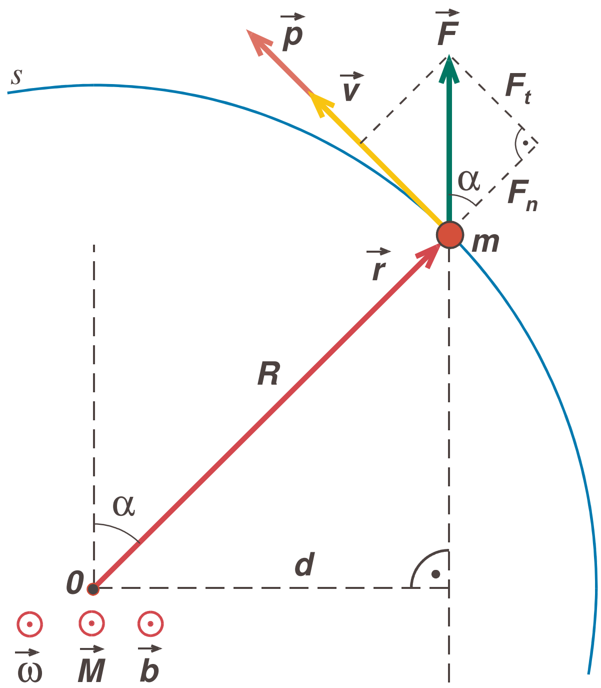
Síla také může způsobit deformaci tělesa, přitom můžeme zkoumat jeho **pružnost a pevnost** , které ovšem úzce souvisí se speciálním pohybem tělesa, případně jeho částí, při deformaci.

Často také pozorujeme, že působící síla nemá na nějaké těleso žádný pohybový účinek – v tomto případě ale vždy dochází k působení dalších těles - a jejich účinky na sledované těleso se vyrovnávají – vzniká **rovnovážný stav** tělesa (blíže viz kapitola „Dynamika soustavy hmotných bodů“). Tyto stavy zkoumá **statika** a jsou jistě zásadně důležité zejména ve stavebnictví, při návrhu strojů, … I tento stav rovnováhy tělesa je nedílně spojen s jeho (možnými) pohybovými stavy.

Změnu pohybového stavu tělesa proto právem považujeme za skutečně **základní účinek síly**. Z teoretického i aplikačního hlediska jsou pak důležité jeho následující speciální případy :

Pohybový účinek síly při otáčivém pohybu (otáčivý účinek síly) :

Prostudujme situaci na obrázku, kde síla $\vec{F}$ způsobuje otáčivý kruhový pohyb hmotného bodu m kolem středu O (tímto bodem tedy prochází nějaká osa rotace kolmá k nákresně) :



Ze střední školy víte, že otáčivý účinek síly (ležící v rovině otáčení) je úměrný její velikosti a kolmé vzdálenosti od osy rotace a kvantitativně ho popisujeme veličinou ***moment síly*** :

$$M = F \cdot d = F \cdot R \cdot \sin\alpha = R \cdot F_\tau$$

Vidíme, že na rotační pohyb má vliv pouze tečná složka síly, tj. složka kolmá k poloměru otáčení. Normálová složka se jen snaží změnit poloměr otáčení, v nejobecnější prostorové situaci by mohla ještě existovat třetí složka síly, rovnoběžná s osou, která by se snažila tuto osu vychýlit.

Když do středu otáčení O umístíme počátek soustavy souřadnic, pak poloměr otáčení je současně průvodičem hmotného bodu a moment síly můžeme definovat vektorově :

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Velikost tohoto vektoru je ve shodě s předchozím skalární definicí a navíc – jeho **směr** udává nyní směr ***osy rotace*** – a tento směr má i **úhlová rychlost** rotace $\vec{\omega}$ - moment síly je tedy jednoznačně spojený s důsledkem svého působení (povšimněte si na obrázku, že jsou shodné i **orientace** těchto vektorů).

Dále - při znalosti pojmů „oskulační kružnice“ , případně „poloměr křivky“ nám musí být jasné, že i bez existence skutečné rotační osy lze mluvit o kruhovém pohybu hmotného bodu alespoň lokálně - v kterémkoliv místě obecného křivočarého pohybu.
Působením vhodné síly se přitom středem tohoto kruhového (rotačního) pohybu může stát jakýkoliv bod v prostoru, proto jsme oprávněni definovat a zkoumat moment síly vzhledem k **libovolnému bodu** O , do něhož pak umístíme **počátek** vztažné soustavy :

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

moment síly *(vzhledem k bodu O)*

Pozn. : Pak ovšem – když by se jednalo o skutečný rotační pohyb s pevnou osou rotace - a počátek soustavy souřadnic by byl někde na ose rotace – **nebude** vektor momentu síly **rovnoběžný** s touto osou - a rotaci bude ovlivňovat pouze jeho **rovnoběžná složka** (viz pohybová rovnice rotačního pohybu v kapitole „Dynamika soustavy hmotných bodů“)

Analogickou veličinu jako je moment síly používáme také pro zhodnocení výsledku působení síly – tj. pro zhodnocení **„míry otáčivého pohybu“** hmotného bodu :

$$\boxed{\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

moment hybnosti *(vzhledem k bodu O)*

Pozn. : Jak vidíte na obrázku – směr a orientace momentu hybnosti také souhlasí s úhlovou rychlostí rotace (a v případě podle předchozí poznámky půjde opět jen o jeho rovnoběžnou složku)

Důležitý vztah dostaneme, jestliže vypočítáme časovou změnu (derivaci) této veličiny, s využitím pravidel o derivaci součinu funkcí:

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt}\right) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

Zatímco výraz v první závorce je zřejmě nulový (rovnoběžné vektory), ve druhé závorce vznikla časová derivace hybnosti, která se podle pohybové rovnice rovná působící síle. Dostáváme tedy :

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Nebo-li :

$$\boxed{\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M}}$$

<u>pohybová rovnice rotačního pohybu</u> *(hmotného bodu)*

<u>Slovní vyjádření</u> : ***Časová změna momentu hybnosti hmotného bodu je rovna*** *(je úměrná)* ***momentu působící síly***.

Název této rovnice poukazuje na její zásadní význam pro popis rotačního pohybu hmotného bodu. Veličiny <u>moment síly</u> a <u>moment hybnosti</u> jsou však definovány zcela **<u>obecně</u>** , vzhledem <u>k libovolnému bodu prostoru</u> , proto tato rovnice platí i pro jakýkoliv pohyb hmotného bodu v libovolně zvolené soustavě souřadnic (inerciální). To bude později využito při studiu dynamiky <u>soustav hmotných bodů</u> .

<u>Časový účinek síly:</u>

Provedeme nyní zajímavou úpravu pohybové rovnice :

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Vynásobíme rovnici diferenciálem času :

$$m \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot dt$$

Tím je vlastně provedena <u>separace proměnných</u> a diferenciální rovnici nyní integrujeme určitým integrálem (na nějaké části dráhy) – tj. provedeme jak integraci <u>levé strany</u> v mezích její proměnné (vektor rychlosti) od počáteční rychlosti $\vec{v}_1$ do konečné rychlosti $\vec{v}_2$ - tak také integraci <u>pravé strany</u> v mezích její proměnné (času) od počátečního času t_1 do konečného času t_2 (vidíte také, že počáteční čas nemusí být nulový) :

$$\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \cdot d\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt$$

Pravá strana rovnice, vyjadřující „**spolupůsobení**“ <u>síly</u> a jejího <u>časového trvání</u> , se definuje jako nová fyzikální veličina :

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt}$$

<u>impulz síly</u>

Pozn. : Na rozdíl od určitých integrálů, které jsme použili při ukázkovém řešení pohybové rovnice, se nyní integrují vektorové veličiny - vektorový zápis ale jako vždy pouze znamená, že jde o tři „paralelní“ obyčejné rovnice (integrály) pro tři skalární veličiny - souřadnice vektoru :

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int_{t_1}^{t_2} F_x \cdot dt \\ I_y &= \int_{t_1}^{t_2} F_y \cdot dt \\ I_z &= \int_{t_1}^{t_2} F_z \cdot dt \end{aligned}\right\} \qquad \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt$$

Důsledek působení této veličiny potom dobře popisuje druhá strana rovnice. Jde o jednoduchý integrál přírůstků rychlosti (ale opět vektorová veličina) :

$$\vec{I} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m\, d\vec{v} = m \cdot \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d\vec{v} = m \cdot [\vec{v}]_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} = m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Výsledek není samozřejmě nijak překvapivý – působením síly přece dochází ke změně rychlosti hmotného bodu, tedy i ke změně jeho hybnosti - vznikla však velmi užitečná **rovnost celkové změny hybnosti a působícího impulzu síly** (změna hybnosti se tedy děje vždy ve směru impulzu síly) :

$$\boxed{\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta \vec{p}}$$

impulz síly a změna hybnosti

Specifická situace nastane při působení **konstantní síly** – tu lze totiž vytknout a zbylý integrál nám dá časový interval jejího působení :

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \vec{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{F} \cdot [\, t\,]_{t_1}^{t_2} = \vec{F} \cdot (t_2 - t_1) = \vec{F} \cdot \Delta t$$

A kromě jednoduchého výpočtového vztahu je zřejmé, že celková změna hybnosti a rovněž změna rychlosti nastane nyní nejen ve směru impulzu síly, ale přímo **ve směru působící síly** :

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p} = m \cdot \Delta \vec{v}$$

(Další účinek síly - *dráhový účinek síly* – bude probrán ve zvláštní kapitole.)

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 02/2006**

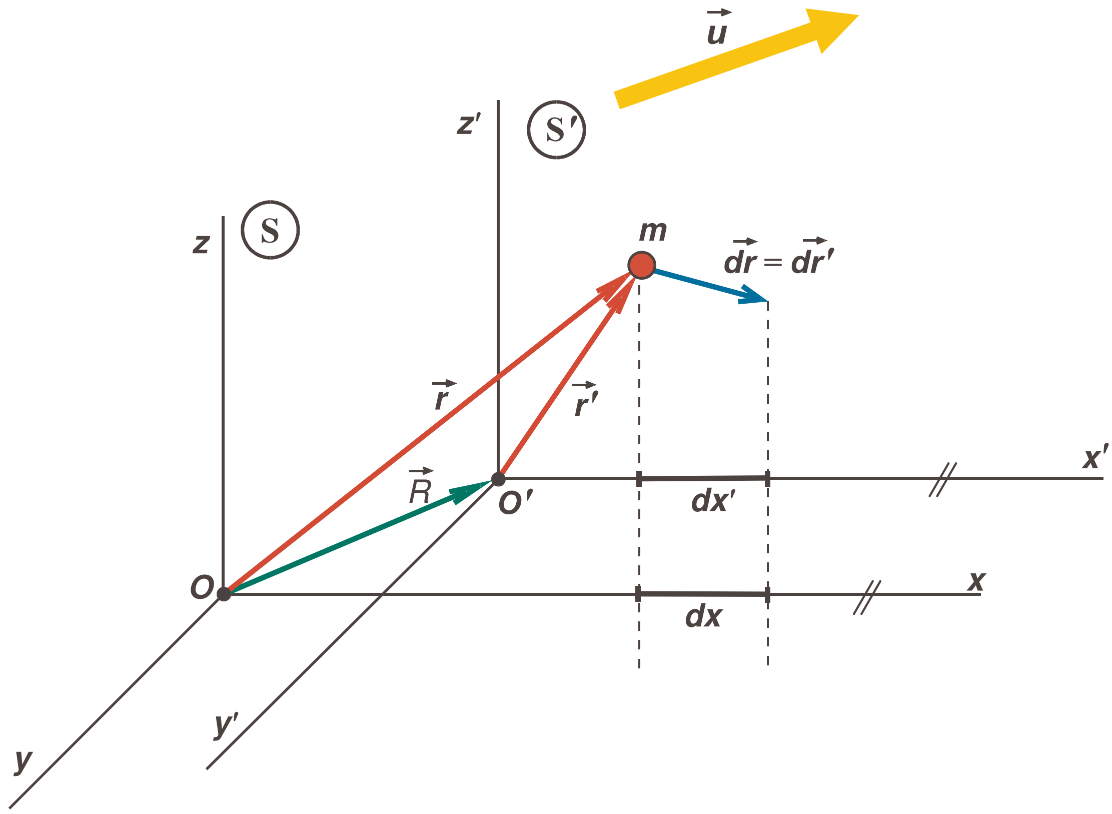
rev. 02/2007

Inerciální a neinerciální soustavy

Vraťme se nyní k relativním pojmům klidu a pohybu obsaženým v Newtonově zákonu setrvačnosti, které závisejí na volbě vztažné soustavy souřadnic.

Představme si dva kartézské souřadné systémy S a S', které se vůči sobě pohybují nějakým jednoduchým způsobem - například tak, že S je v klidu (vůči nákresně) a S' se pohybuje směrem (šikmo) vpravo, přičemž jejich osy zůstávají stále rovnoběžné (tak vypadá ***posuvný pohyb***, nebo-li **translace**).

V obou těchto systémech pak budeme sledovat jeden a tentýž hmotný bod m, který se zcela nezávisle na souřadných systémech pohybuje v prostoru (viz obr).



Na obrázku jsou vyznačeny tři polohové vektory :

$\vec{r} = (x, y, z)$ průvodič hmotného bodu v soustavě S

$\vec{r}' = (x', y', z')$ průvodič hmotného bodu v soustavě S'

$\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$ průvodič bodu O' v soustavě S

Vidíme, že zřejmě platí :

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}}$$

vztah mezi průvodiči v soustavě S a S'

Proveďme derivaci této rovnice :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

A uvažme význam vzniklých členů :

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}}$$

rychlost hmotného bodu v soustavě S

$$\boxed{\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt} = \vec{v}'}$$

rychlost hmotného bodu v soustavě S'

$$\boxed{\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{u}}$$

unášivá rychlost soustavy S' (vzhledem k S)

Název unášivé rychlosti pochází z popisu situace, kdy je hmotný bod v klidu v soustavě S' (např. sedící cestující ve vozidle), ale stejně se pak pohybuje vůči soustavě S , protože je čárkovanou soustavou (vozidlem) **„unášen"** rychlostí u .

Pozn. : Povšimněte si také ve druhé rovnici toho detailu, že rychlost v čárkované soustavě musí být samozřejmě počítána z měření v této soustavě, tj. že přírůstek dráhy (jeho tři souřadnice) musí být změřen na osách této soustavy , a proto je příslušný matematický výraz – diferenciál čárkovaného průvodiče - označen ještě další čárkou, jako diferenciál definovaný (měřený) v soustavě S'. Z obrázku je dobře vidět, že **rovnost obou diferenciálů** (čárkovaných a nečárkovaných, měřených v S a v S') nastane pouze za podmínky **rovnoběžnosti souřadných os** obou soustav, což je právě případ našeho **posuvného pohybu** soustavy ***S'*** (pokud by ovšem soustava S' konala například rotační pohyb, byla by situace úplně jiná - viz výklad na závěr této kapitoly).

Pak tedy pro rychlosti hmotného bodu platí podobná rovnice jako pro průvodiče :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}}$$

vztah mezi rychlostmi v soustavě S a S'

Další derivací pak dostáváme vztah pro zrychlení:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Významy jednotlivých členů rovnice budou analogické :

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}}$$

zrychlení hmotného bodu v soustavě S

$$\boxed{\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}'}$$

zrychlení hmotného bodu v soustavě S'

$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{a}_u}$$

unášivé zrychlení soustavy S'

Pro zrychlení hmotného bodu platí potom rovnice :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_u}$$

vztah mezi zrychleními v soustavě S a S'

Získané vztahy využijme dále pro rozbor dvou základních případů pohybu soustavy S' :

1) ***rovnoměrný přímočarý pohyb soustavy S'***

Unášivá rychlost je v tomto případě konstantní :

$$\boxed{\vec{u} = konst.}$$

Uvažme pak situaci, že v soustavě S pro nějaké těleso **platí 1. Newtonův zákon** - tedy že se toto těleso bez působení sil pohybuje v soustavě S rovnoměrným přímočarým pohybem, nebo je v klidu. Jeho rychlost je tedy konstantní , včetně nuly :

$$\vec{v} = konst.$$

Z výše uvedených převodních vztahů pro rychlosti mezi oběma soustavami pak plyne, že rychlost tělesa v soustavě S' bude také konstantní – to znamená, že i v této soustavě se těleso pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, nebo je v klidu :

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} = konst.$$

Zákon setrvačnosti tedy platí v soustavě S , i v soustavě S'.

Takové souřadné soustavy se pak nazývají ***inerciální*** (inercie = setrvačnost).

Nalezneme nyní konkrétní matematický transformační vztah mezi souřadnicemi inerciálních soustav. Využijeme nejprve výše odvozenou obecně platnou rovnici pro průvodiče :

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

Jestliže přijmeme čistě formální předpoklad, že soustava S je „**prvotní**“ („**stará**“) a soustava S' je „**druhotná**“ („**nová**“), pak by v převodním vztahu měly stát „**nové souřadnice**“ na levé straně rovnice :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$$

Vektorovou rovnici můžeme rozepsat do tří rovnic skalárních :

$$x' = x - R_x$$
$$y' = y - R_y$$
$$z' = z - R_z$$

Unášivá rychlost soustavy S' je vlastně rychlostí pohybu jejího počátku O' v soustavě S. Uvažme dále, že tento pohyb je možno rozložit na tři jednoduché pohyby na souřadných osách x, y a z (viz odstavec „Kinematika hmotného bodu“) a že konstantní unášivá rychlost znamená konstantní souřadnice jejího vektoru - a tyto souřadnice udávají jednotlivé konstantní rychlosti pohybů na těchto osách :

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$$

Na každé souřadné ose soustavy S se tedy děje obyčejný **přímočarý rovnoměrný pohyb** , jehož rovnice je nejstarší fyzikální rovnicí, kterou znáte : $s = v \cdot t$

Tento jednoduchý vztah platí ovšem **za předpokladu** , že v čase $t = 0$ je dráha nulová, tj. že bod O' je v místě bodu O , jinak řečeno - že **v nulovém čase obě soustavy splývají** . Potom tedy pro všechny tři souřadnice bodu O' v soustavě S - tj. pro vykonané dráhy na souřadných osách x, y, z , bude :

$$R_x = u_x \cdot t$$

$$R_y = u_y \cdot t$$

$$R_z = u_z \cdot t$$

Tyto tři skalární vztahy může také případně nahradit jedna vektorová rovnice (ale dále ji nepoužijeme) :

$$\vec{R} = \vec{u} \cdot t$$

Když získané skalární výrazy dosadíme do obecných rovnic, vzniknou hledané konkrétní transformační vztahy mezi oběma inerciálními soustavami :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - u_x \cdot t \\ y' &= y - u_y \cdot t \\ z' &= z - u_z \cdot t \end{aligned}}$$

Galileovy transformace

Nebo vektorově :

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{u} \cdot t$$

K tomu přistupuje „samozřejmý“ vztah mezi časy :

$$\boxed{t = t'}$$

Pro obrácený převod souřadnic, z nové soustavy S' do staré S , je pak vhodné, aby na levých stranách transformačních rovnic byly souřadnice nečárkované :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + u_x \cdot t \\ y &= y' + u_y \cdot t \\ z &= z' + u_z \cdot t \\ t &= t' \end{aligned}}$$

Galileovy transformace obrácené *(inverzní)*

Pozn. : Tyto transformační rovnice, které jsou zřejmě neoddělitelně spojeny s principy klasické mechaniky, byly zásadně popřeny Einsteinovou (speciální) teorií relativity a nahrazeny v ní jinými vztahy pro inerciální systémy, tzv. **Lorentzovými transformacemi**.

Prozkoumejme dále také **platnost 2. Newtonova zákona** v soustavě S'. Předpokládejme tedy, že pro hmotný bod v soustavě S již neplatí zákon setrvačnosti, ale že se působením nějakých těles začal pohybovat podle zákona síly :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

A podívejme se, zda bude tato rovnice platit i v čárkované soustavě. Při konstantní unášivé rychlosti soustavy S' je ovšem její unášivé zrychlení **nulové** :

$$\vec{a}_u = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(\, konst \,) = 0$$

A z převodních vztahů plyne rovnost zrychlení hmotného bodu v obou inerciálních soustavách :

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_u = \vec{a}$$

Pohybová rovnice v S' má tedy tvar :

$$m \cdot \vec{a}' = m \cdot (\, \vec{a} - \vec{a}_u \,) = m \cdot \vec{a} = \vec{F} = \vec{F}'$$

Vidíme jasně, že v obou soustavách jsou stejná zrychlení i stejné působící síly.

Pohybová rovnice platí tedy v **nezměněném tvaru** v každé inerciální soustavě – tj. je **(formálně) stejná** ve **všech inerciálních soustavách** .

Ještě jinak řečeno :

Pohybové rovnice jsou invariantní vůči Galileově transformaci.

Tato skvělá vlastnost pohybových rovnic, která velmi zjednodušuje matematické výpočty a umožňuje také jinou, elegantní **definici inerciálních** soustav – jako **soustav, ve kterých platí Newtonovy zákony** , však zcela **znemožňuje** nalezení oné základní, význačné inerciální soustavy, předpokládané Newtonem – tj. **absolutního prostoru** .

Nyní diskutujme druhý důležitý případ pohybu soustavy S' :

2) ***nerovnoměrný křivočarý (posuvný) pohyb soustavy S'***

Unášivá rychlost soustavy S' je nyní obecně **proměnnou** veličinou, tj. může se měnit jak velikost , tak také směr a orientace jejího vektoru :

$$\boxed{\vec{u} \neq konst.}$$

Soustava S' se tedy pohybuje **nerovnoměrným křivočarým pohybem** vůči inerciální soustavě S (pozor - stále to musí být **translace** – **posuvný pohyb**, při kterém osy soustavy zachovávají svůj směr - to je přece nutný předpoklad platnosti používaných transformačních vztahů).

Pozn. : O translaci, případně rotaci se mluví zejména při popisu **obecného pohybu pevných těles**, ostatně každá **soustava souřadnic je vždy spojena s nějakým hmotným tělesem**, jak si uvědomíme později ve speciální teorii relativity. Jiná definice popisuje **translaci** jako takový pohyb, při kterém **všechny body tělesa** (zde souřadných os) se pohybují po geometricky **stejných drahách**.
Názorně si můžeme translaci představit jako napří. pohyb kurzoru počítačové myši na obrazovce, lodičky na Ruském kole, balistického kyvadla, auta po křivočaré dráze – nesmělo by se ale v zatáčkách natáčet do směru svého pohybu.

Při křivočarém pohybu čárkované soustavy je ovšem její unášivé zrychlení nenulové :

$$\boxed{\vec{a}_u = \frac{d\vec{u}}{dt} \neq 0}$$

Potom i v případě konstantní rychlosti nějakého tělesa v soustavě S - tj. jestliže by v S pro toto těleso **platil zákon setrvačnosti** - podle obecných převodních vztahů ale v soustavě S' rychlost tělesa už konstantní nebude :

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \neq konst.$$

Zákon setrvačnosti tedy v S' neplatí, čárkovaná soustava je nyní ***neinerciální soustavou*** a protože je unášivé zrychlení nenulové, bude zrychlení hmotného bodu v soustavě S' odlišné od zrychlení v S :

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_u$$

A pohybová rovnice v S' má potom tvar :

$$m \cdot \vec{a}' = m \cdot (\vec{a} - \vec{a}_u) = m \cdot \vec{a} - m \cdot \vec{a}_u = \vec{F} + \vec{F}^* = \vec{F}'$$

V **neinerciální** soustavě již tedy **pohybová rovnice není invariantní**, neboť **změnila svůj tvar** – na její pravé straně se kromě **původní** působící síly objevuje **nová síla** závisející na unášivém zrychlení soustavy :

$$\boxed{\vec{F}^* = -m \cdot \vec{a}_u}$$

setrvačná síla (v neinerciální soustavě)

Tato síla vlastně nutí těleso pokračovat, **setrvávat** v původním pohybu, **nevyjadřuje** však působení žádného dalšího hmotného objektu (tak jsou definovány **skutečné síly** v Newtonových zákonech), proto se **setrvačná síla** také nazývá silou **zdánlivou**, nebo **fiktivní**.
Je to ovšem síla naprosto reálně působící, jak každý z nás sám na sobě pociťuje ve zrychlujícím nebo brzdícím dopravním prostředku. (Původ této síly vysvětluje Obecná teorie relativity.)

Celkem tedy : V inerciálních systémech vždy invariantní **pohybová rovnice**, která má na pravé straně pouze skutečnou sílu, **v neinerciálním systému neplatí !**

Abychom získali platný matematický vztah , musíme na pravou stranu rovnice **přidat** k původní skutečné síle ještě **sílu setrvačnou** :

$$\boxed{m\cdot\vec{a}' = \vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}^*}$$

pohybová rovnice v neinerciální soustavě

Nezapomeňme, že vztah pro setrvačnou sílu byl odvozen za předpokladu nerovnoměrného křivočarého pohybu neinerciální soustavy S' . Můžeme proto dobře uplatnit znalosti z kinematiky o zrychlení takového pohybu a o jeho rozkladu na tečnou a normálovou složku :

a) Jako speciální případ pohybu neinerciální soustavy S' lze vyčlenit (translační) **rovnoměrný křivočarý pohyb**, který se koná s konstantní velikostí (ale s proměnlivým směrem) unášivé rychlosti:

$$\boxed{u = konst.}$$

Při tomto pohybu sice neexistuje tečné zrychlení , ale vždy je nenulové **zrychlení dostředivé**, dané zakřivením dráhy, které pak tedy tvoří celé **unášivé zrychlení** soustavy :

$$\vec{a}_u = \vec{a}_n = \frac{u^2}{R}\cdot\vec{n}$$

Příslušná setrvačná síla má samozřejmě opačný směr (viz obrázek), odtud také její název :

$$\boxed{\vec{F}_n^* = -m\cdot\vec{a}_n = -m\cdot\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}}$$

odstředivá síla

Velikost odstředivé síly je ovšem stejná jako velikost síly dostředivé :

$$F_n^* = F_n = m\cdot\frac{u^2}{R}$$

b) V případě (translačního) **nerovnoměrného křivočarého pohybu** soustavy S' se již bude měnit jak velikost , tak také směr a orientace unášivé rychlosti :

$$\boxed{\vec{u} \neq konst.}$$

A kromě stále existujícího normálového zrychlení se objeví ještě navíc **tečné zrychlení** :

$$\vec{a}_u = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

Odstředivá síla tak bude doplněna další setrvačnou silou mířící proti směru tečného zrychlení (viz obr.) :

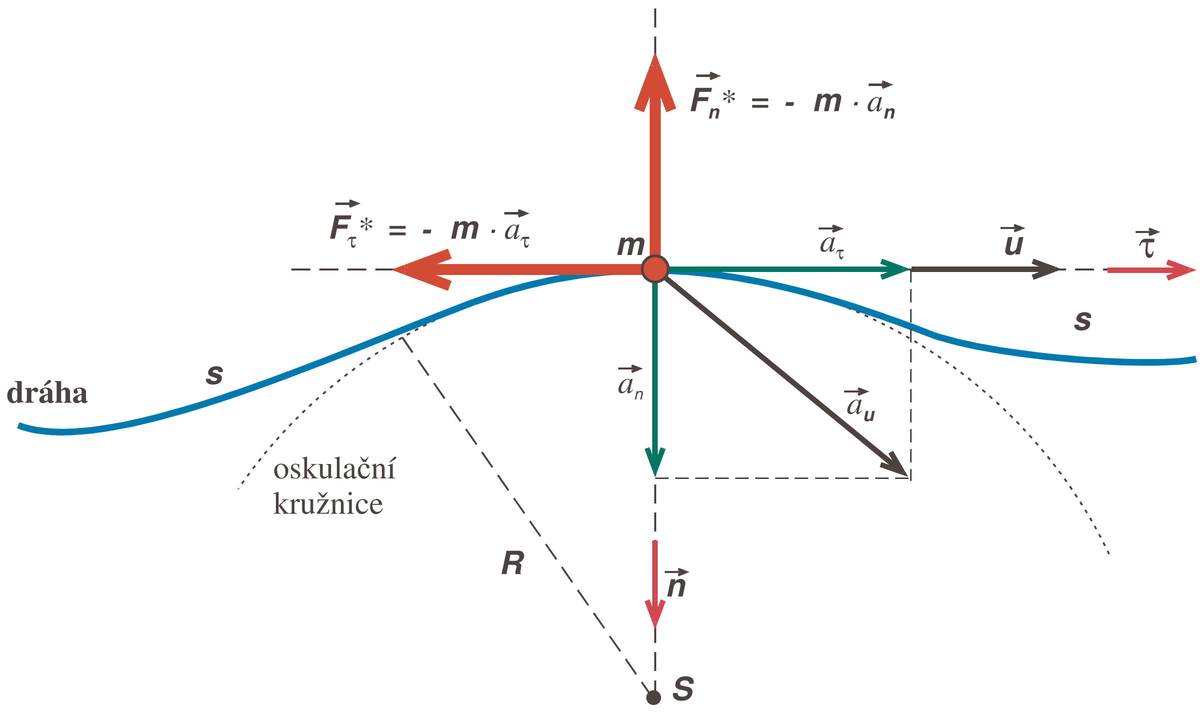
$$\boxed{\vec{F}_\tau^* = -m\cdot\vec{a}_\tau = -m\cdot\frac{du}{dt}\cdot\vec{\tau}}$$

Eulerova (setrvačná) síla

Její velikost je samozřejmě stejná jako velikost teční síly :

$$F_\tau^* = F_\tau = m\cdot\frac{du}{dt}$$

Z vlastní zkušenosti (opět z dopravních prostředků, které dokáží brzdit a zrychlovat i v zatáčkách) můžeme jistě potvrdit, že obě síly skutečně existují (viz obr.).



c) <u>Nejjednodušším (translačním) pohybem</u> neinerciální soustavy S' je **<u>nerovnoměrně rychlený přímočarý pohyb</u>** (je to ovšem také pouze speciální případ nerovnoměrného křivočarého pohybu), který je možno charakterizovat <u>proměnnou velikostí</u> unášivé rychlosti a jejím <u>konstantním směrem a orientací</u> ve směru pohybu na přímce dráhy – což lze formálně zapsat jako neměnnost <u>tečného</u> vektoru :

$$\boxed{u \neq konst.} \qquad \boxed{\vec{\tau} = konst.}$$

Unášivé zrychlení má také směr přímky dráhy :

$$\vec{a}_u = a_u\cdot\vec{\tau} = \frac{du}{dt}\cdot\vec{\tau}$$

Setrvačnou sílu pak určíme dosazením tohoto zrychlení do základní definice :

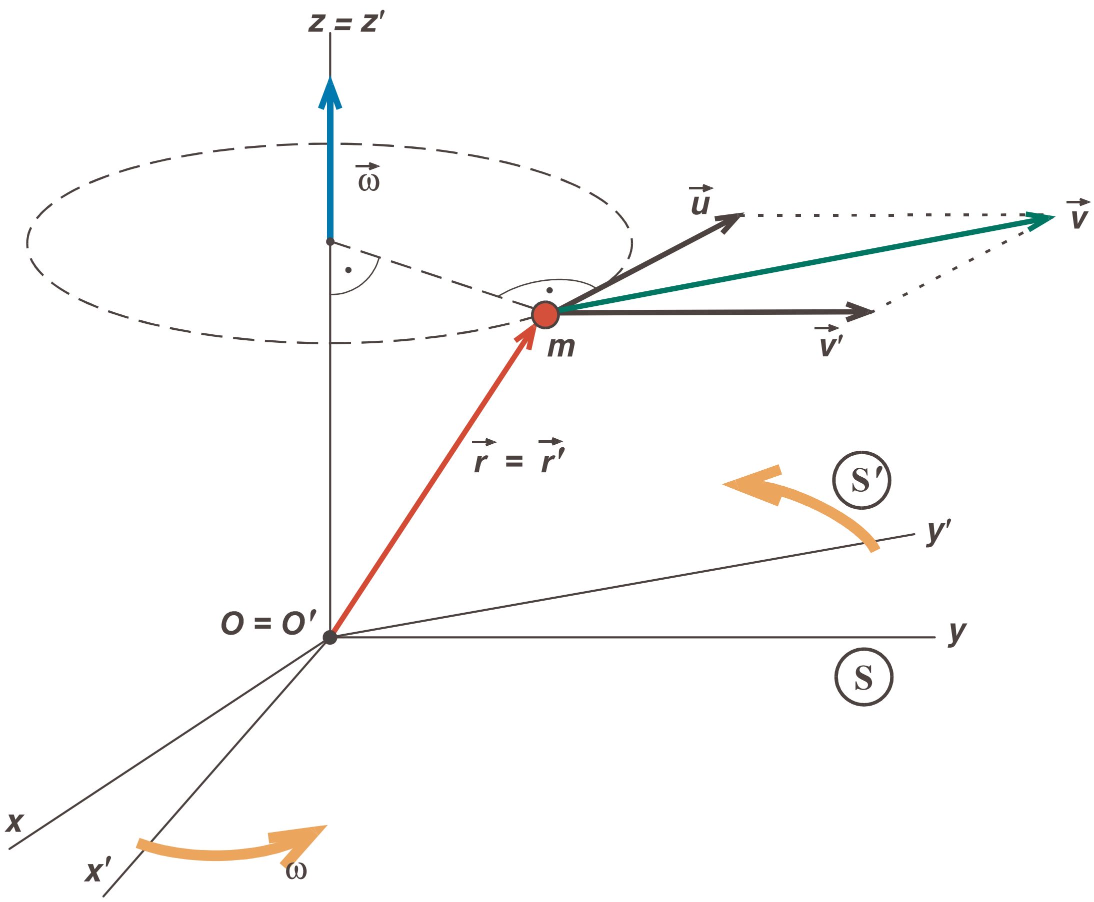
$$\boxed{\vec{F}^* = -m \cdot \vec{a}_u = -m \cdot \frac{du}{dt} \cdot \vec{\tau}}$$

A je zřejmé, že se vlastně principiálně jedná o tečnou ***Eulerovu setrvačnou sílu*** .

V **nejobecnějším případě** je ovšem pohyb neinerciální soustavy S' (stejně jako obecný pohyb tělesa – viz kapitola „Dynamika tuhého tělesa“) vždy vytvářen spojením pohybu **translačního** s pohybem **rotačním** . Proto na závěr prozkoumáme ještě třetí základní případ pohybu neinerciální soustavy S' :

3) ***rotační pohyb soustavy S'***

Předpokládejme, že inerciální soustava S je v klidu vůči nákresně a **neinerciální soustava S' se otáčí** úhlovou rychlostí ω kolem **společných os** $z = z'$, přičemž počátky obou soustav splývají $(O = O')$.



Opět sledujeme průvodiče **jediného** hmotného bodu m v soustavě S i S' . Protože počátky obou soustav splývají, jsou tyto vektory **totožné** :

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}'}$$

Souřadnice tohoto vlastně jediného vektoru jsou ovšem **různé** v obou soustavách, ale hlavně jsou různé jeho **časové změny** (přírůstky), tedy i **derivace** podle času v těchto soustavách.

Jestliže si nejprve představíme, že hmotný bod je vůči čárkované soustavě v klidu (tj. je se soustavou S' například pevně spojený), pak nám bude zřejmé, že je touto soustavou unášen a že společně s ní koná kruhový pohyb . Jeho unášivá rychlost je tedy rovna **obvodové rychlosti** kruhového pohybu :

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Obecně se ovšem hmotný bod může v soustavě S' ještě navíc pohybovat nějakou rychlostí $\vec{v}'$, potom podle principu skládání rychlostí je jeho **výsledná rychlost** v klidové soustavě S rovna součtu obou těchto rychlostí :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

skládání rychlostí v soustavě S

Rychlosti hmotného bodu jsou ovšem určeny časovými přírůstky – derivacemi - příslušných průvodičů v obou soustavách :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Z důvodu rovnosti průvodičů můžeme pak psát :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Vytvořili jsme tedy rovnici platnou pro **jeden a tentýž vektor** průvodiče ve **dvou různých** soustavách, inerciální S a neinerciální S' , která vysvětluje „celkový“ přírůstek průvodiče (časovou změnu, derivaci) v inerciální soustavě S jako součet jeho **vlastního přírůstku** v S' a přírůstku od unášivého **rotačního pohybu** v soustavě S'.

Posunout do počátku můžeme ovšem vektor jakékoliv fyzikální veličiny a tím se tento vektor dostane do stejné situace jako průvodič a stejným způsobem (jako vektory) se budou skládat jeho přírůstky od rotačního pohybu i od jeho vlastní změny v S'.

Dostaneme tak velmi ***obecný vztah mezi derivacemi libovolného vektoru*** $\vec{A}$ ve dvou různých vztažných soustavách – v inerciální S a v neinerciální soustavě S', rotující úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$:

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}}$$

Představa, že jakákoliv vektorová fyzikální veličina se chová stejně jako polohový vektor z mechaniky je ovšem poněkud nezvyklá, celkem ale jde pouze o maximálně názorné „odvození“ obecného, velmi nenázorného vztahu z matematické analýzy, platícího pro libovolné vektorové spojité funkce, který dokonce ani nepotřebuje předpoklad společných počátků a rotačních os obou soustav.

My tento vztah využijeme pro **výpočet zrychlení** hmotného bodu **v neinerciální soustavě** . Nejprve ho aplikujeme na vektor rychlosti v soustavě S' :

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{v}'$$

Na pravé straně rovnice hned dostáváme hledané zrychlení :

$$\vec{a}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} - \vec{\omega}\times\vec{v}'$$

V prvním členu na pravé straně dosadíme za čárkovanou rychlost z počátečního základního vztahu pro skládání rychlostí a provedeme derivace podle standardních pravidel pro derivace :

$$\vec{a}' = \frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{\omega}\times\vec{r}) - \vec{\omega}\times\vec{v}' = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} - \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\omega}\times\vec{v}'$$

Na pravé straně rovnice vznikly nyní známé veličiny zrychlení , úhlového zrychleni a rychlosti hmotného bodu v soustavě S , tedy nečárkované veličiny :

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\varepsilon}\times\vec{r} - \vec{\omega}\times\vec{v} - \vec{\omega}\times\vec{v}'$$

A pro rychlost v S použijeme ještě jednou vztah pro skládání rychlostí a provedeme roznásobení a sdružení členů v poslední rovnici :

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\varepsilon}\times\vec{r} - \vec{\omega}\times(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}) - \vec{\omega}\times\vec{v}' = \vec{a} - \vec{\varepsilon}\times\vec{r} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

Po vynásobení hmotností dostaneme ihned ***pohybovou rovnici v rotující soustavě*** :

$$\boxed{m\cdot\vec{a}' = m\cdot\vec{a} - m\cdot\vec{\varepsilon}\times\vec{r} - m\cdot\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\cdot m\cdot\vec{\omega}\times\vec{v}' = \vec{F} + \vec{F}_1^* + \vec{F}_2^* + \vec{F}_3^* = \vec{F}'}$$

Vidíme, že kromě **skutečné síly** $\vec{F}$ působící v inerciální soustavě musíme do pohybové rovnice v neinerciální rotující soustavě započítat další celkem **tři zdánlivé síly** :

$$\boxed{\vec{F}_1^* = \vec{F}_\tau^* = -m\cdot\vec{\varepsilon}\times\vec{r}}$$

Eulerova (setrvačná) síla

$$\boxed{\vec{F}_2^* = \vec{F}_n^* = -m\cdot\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

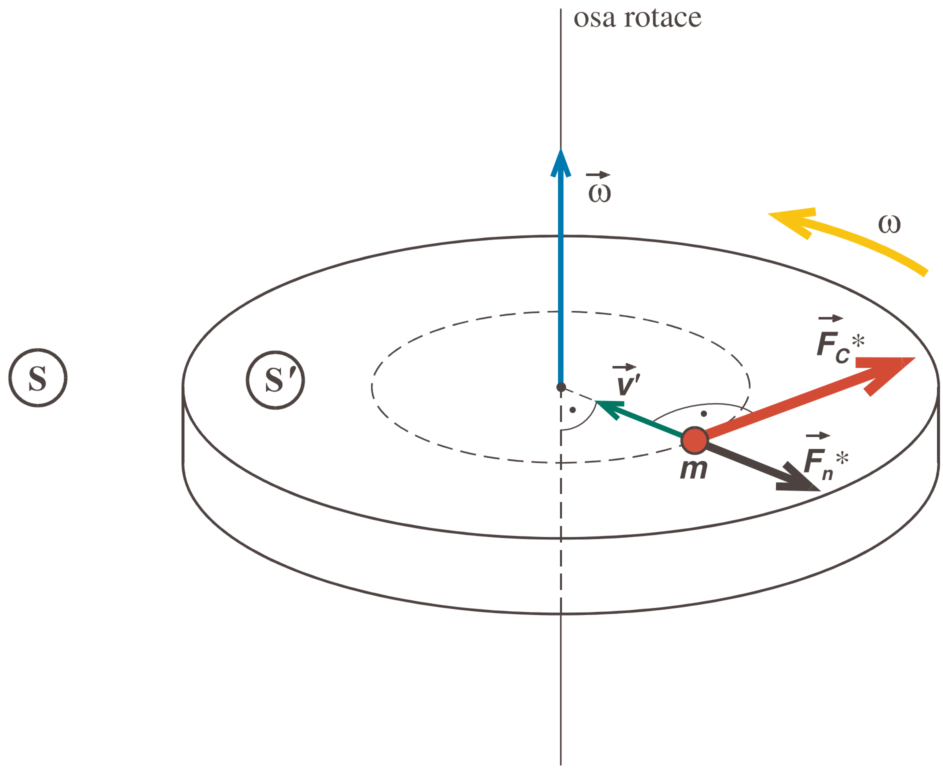
odstředivá síla

Kromě těchto dvou očekávaných a známých sil existuje ještě další síla napohled poněkud komplikovaných vlastností :

$$\boxed{\vec{F}_3^* = \vec{F}_C^* = -2\,m\cdot\vec{\omega}\times\vec{v}'}$$

Coriolisova síla

Vzorec nám ukazuje, že tato síla se objevuje pouze v případě **vlastního pohybu** hmotného bodu v neinerciální soustavě rychlostí, která není rovnoběžná s osou rotace (viz obr.).



Z důvodu relativně malé velikosti Coriolisovu sílu na povrchu Země v běžném životě přímo nepociťujeme, přesto je to veličina dobře měřitelná a za určitých okolností může mít v nějaké technické aplikaci výrazný vliv.

(Může například způsobit vír vytékající kapaliny, odlišného smyslu na severní i jižní polokouli, odklánět dráhu padající střely, stáčet rovinu matematického kyvadla …)

---

konec kapitoly

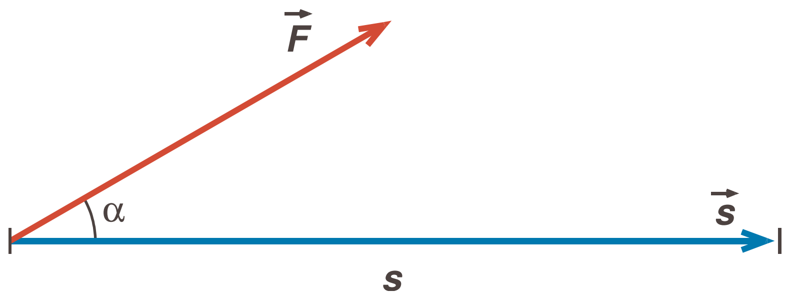
Práce a energie

Pro svoji zásadní důležitost bývá mechanická práce vysvětlována jako jeden z důsledků působení síly na hmotný objekt (hmotný bod) – tzv. ***dráhový účinek síly***.

Ze střední školy znáte základní definici fyzikální veličiny ***mechanické práce*** , kterou vykoná **konstantní** síla F působící na hmotný bod m na **přímé** dráze délky s pod **konstantním** úhlem α (vzhledem k přímce dráhy, viz obr.):

$$\boxed{A = F \cdot s \cdot \cos\alpha}$$

$$[1\ Joule] = [1\ J]$$



Síla je samozřejmě vektor a jestliže definujeme i dráhu jako vektor (je to úsečka, stačí jí přiřadit orientaci, například ve směru pohybu), potom je výše uvedený vztah vlastně skalárním součinem dvou vektorů :

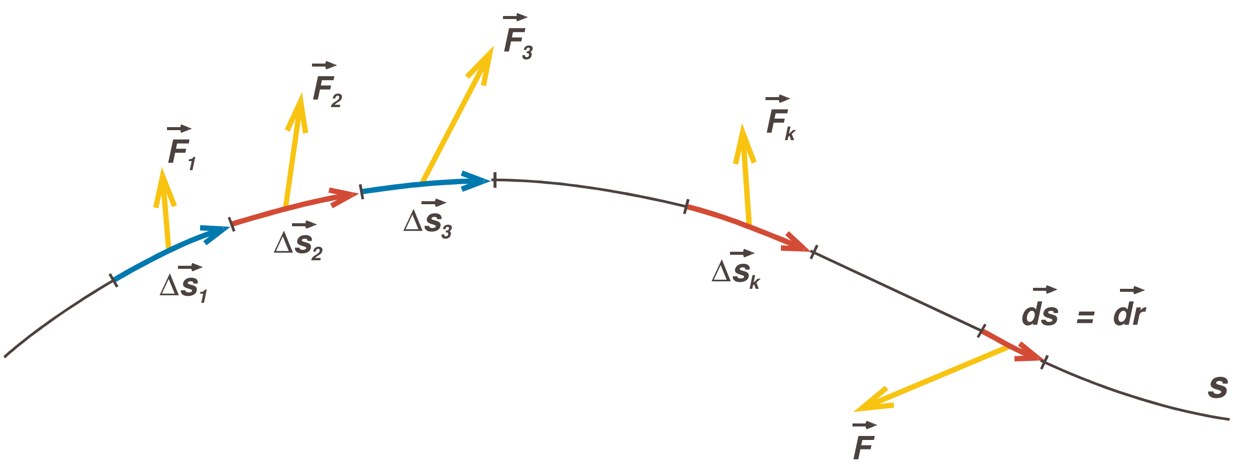
$$\boxed{A = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

mechanická práce

Pro výpočet práce v reálných podmínkách, kdy dráha pohybu je libovolná (spojitá) křivka a působící síla není konstantní, ale libovolná (spojitá) vektorová funkce místa, musíme nyní tento vztah zobecnit :

Křivku dráhy rozdělíme (myšlenkově) na velký počet (N) úseků o velikostech (viz. obr):

$\Delta s_1, \quad \Delta s_2, \quad \Delta s_3, \quad \Delta s_4, \quad ...., \quad \Delta s_N$



Z důvodu jejich velkého počtu jsou tyto úseky dráhy nepatrné , proto je lze přibližně považovat za úsečky (přesně to bude platit až v limitě pro jejich nekonečný počet) a přidáním orientace ve směru pohybu z nich můžeme vytvořit **vektory** :

$$\Delta \vec{s}_1, \quad \Delta \vec{s}_2, \quad \Delta \vec{s}_3, \quad \Delta \vec{s}_4, \quad ...., \quad \Delta \vec{s}_N$$

Právě proto, že každý z těchto úseků je **velmi malý** (v limitě pak nekonečně malý), **nemůže** se na něm příliš **měnit** ani velikost síly ani její směr (je to spojitá funkce) - působící sílu na celém úseku je tedy možno považovat za **konstantní** vektor :

$$\vec{F}_1, \quad \vec{F}_2, \quad \vec{F}_3, \quad \vec{F}_4, \quad ...., \quad \vec{F}_N$$

Nyní je ale situace na těchto úsecích dráhy stejná jako v úvodní definici - konstantní síla působí na přímé dráze - a můžeme proto na každém úseku vypočítat vykonanou práci podle základního vztahu :

$$\Delta A_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{s}_1$$

$$\Delta A_2 = \vec{F}_2 \cdot \Delta \vec{s}_2$$

$$\Delta A_3 = \vec{F}_3 \cdot \Delta \vec{s}_3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\Delta A_N = \vec{F}_N \cdot \Delta \vec{s}_N$$

A **celkovou práci** vykonanou na celé dráze s, potom získáme **sečtením** všech těchto jednotlivých (dílčích , elementárních) prací :

$$A \approx \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + ... + \Delta A_N = \sum_{k=1}^{N} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{s}_k$$

Podmínky tohoto výpočtu a tedy i uvedený vzorec platí ovšem tím přesněji , čím menší jsou jednotlivé úseky dráhy, tedy čím větší je jejich počet. Exaktní vztah proto dostaneme až v limitě pro nekonečný počet úseků N.

V tomto případě pak ale nekonečná suma nekonečně malých členů je vlastně matematickou definicí **určitého integrálu** :

$$A = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{s}_k = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Jestliže dále využijeme znalostí z kinematiky, že diferenciální úsek dráhy je roven diferenciálu průvodiče, můžeme také psát :

$$\boxed{A = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

mechanická práce na obecné dráze

Definičním oborem tohoto určitého integrálu je zkoumaná křivka dráhy s , matematicky se tedy jedná o tzv. ***křivkový integrál*** .

Výraz za znakem integrálu je elementární práce , vykonaná na diferenciálním úseku dráhy, a jde vlastně o diferenciální vyjádření jednotlivých členů původní sumy :

$$\boxed{dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

elementární práce

Celková práce vykonaná na dané dráze je tedy integrálem (limitním součtem) elementárních prací.

Dále : Při konání práce v reálné situaci, když například chceme posunout těleso po předepsané dráze, vždy musíme přitom svojí silou překonávat nějaké jiné síly. Tyto síly jsou často důsledkem působení různých **silových polí** na dané těleso (například gravitační pole, elektrické a magnetické pole, pole pružných sil, pole třecích sil, …)

Zabývejme se proto v dalších řádcích především výpočtem práce v „obyčejném“ gravitačním poli naší Země, ve kterém všichni žijeme :

Práce v gravitačním poli, potenciální energie

Centrální těleso hmotnosti M (hmotný bod) , umístěné ve vakuu v počátku soustavy souřadnic, působí na druhé, ***zkušební*** těleso hmotnosti m, které je v místě $\vec{r}$, silou :

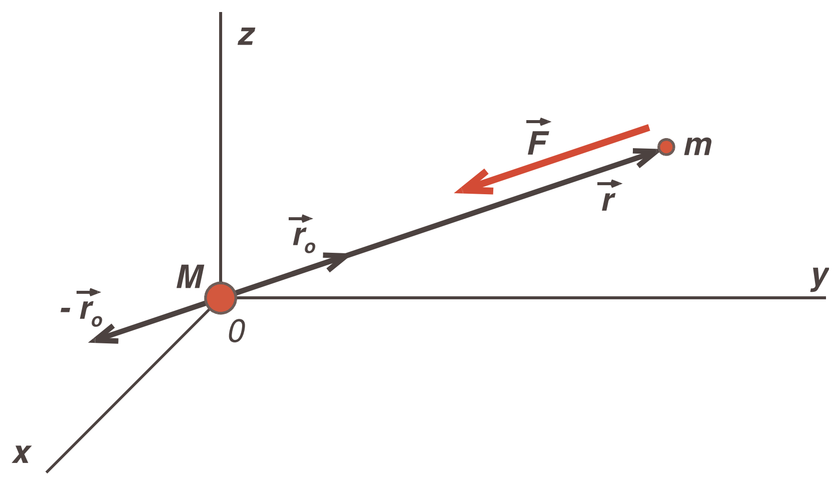
$$\boxed{\vec{F} = -\kappa \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{r}_o}$$

Newtonův gravitační zákon

kde κ je univerzální ***gravitační konstanta*** a $\vec{r}_o$ je jednotkový vektor průvodiče :

$$\boxed{\kappa = 6{,}67.10^{-11} \ [SI]}$$

$$\boxed{\vec{r}_o = \frac{\vec{r}}{r}}$$



Po dosazení jednotkového vektoru dostaneme jiný tvar gravitačního zákona :

$$\vec{F} = -\kappa \cdot \frac{M.m}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Často používaným pojmem je ***intenzita*** gravitačního pole :

$$\boxed{\vec{K} = \frac{\vec{F}}{m} = -\kappa \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{r}_o}$$

Slovní vyjádření : ***Intenzita gravitačního pole je (číselně) rovna síle působící na zkušební těleso jednotkové hmotnosti.***

Je zřejmé, že na povrchu Země $(r = r_z)$ je tato veličina rovna ***gravitační tíhové konstantě*** (zemskému tíhovému zrychlení) :

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\kappa \cdot \frac{M}{r_z^2} \cdot \vec{r}_o}$$

Nebo skalárně :

$$g = \frac{F}{m} = \kappa \cdot \frac{M}{r_z^2} \approx 9{,}80665 \quad m.s^{-2}$$

Nyní pokročme dále a konkrétně vypočítejme práci , kterou vykonáme v gravitačním poli při (velmi pomalém) posunutí tělesa o hmotnosti m (hmotného bodu) po nějaké zadané **dráze** (křivce) s z jejího **počátečního bodu** $\vec{r}_1$ do **koncového bodu** $\vec{r}_2$.

Protože **silové pole** působí na těleso silou $\vec{F}$, musíme **my** (tedy **vnější síla** - vnější vzhledem k danému poli) působit na těleso silou stejně velikou a opačně orientovanou, tj. $-\vec{F}$, abychom sílu pole překonali .

Pozn. : Přesněji vzato, musíme působit ještě malou přídavnou silou navíc pro uvedení tělesa do pohybu, kterou lze ale zřejmě v limitě - při požadavku velmi pomalého posunu - zanedbat.

Základní vztah pro práci vykonanou vnější silou v silovém poli při pohybu tělesa na dráze s proto bude :

$$\boxed{A = \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

práce vnější síly v silovém poli

Je zřejmé, že stejný integrál, ale bez záporného znaménka u síly, by vyjádřil práci silového pole na této dráze :

$$\boxed{A' = \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -A}$$

práce síly pole

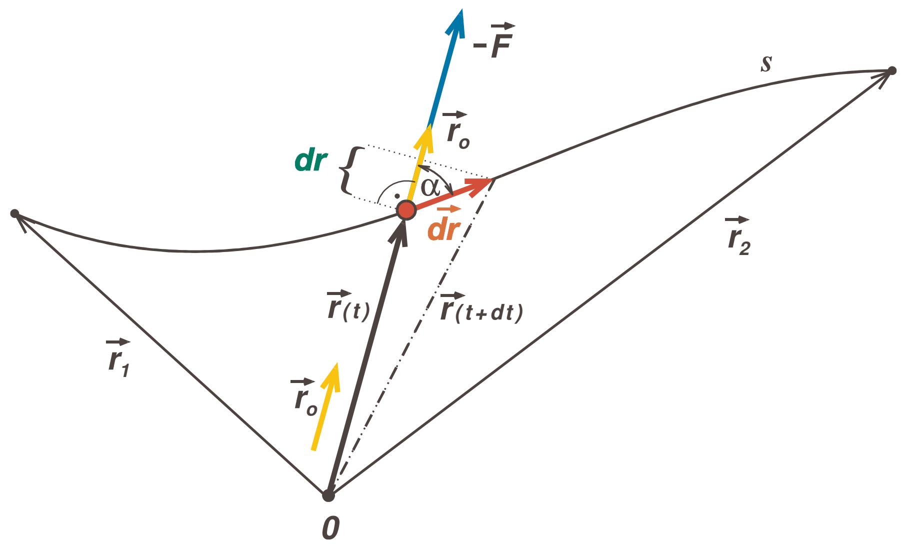
Nyní dosadíme za gravitační sílu a vytkneme konstanty před integrál :

$$A \;=\; \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} -(-\kappa \cdot \frac{Mm}{r^2} \cdot \vec{r}_o) \cdot d\vec{r} \;=\; \kappa M m \int_{\vec{r}_1(s)}^{\vec{r}_2} \frac{\vec{r}_o \cdot d\vec{r}}{r^2}$$

Situace při výpočtu práce je znázorněna na obrázku.

Upravíme dále skalární součin v integrálu, přitom využijeme známé velikosti jednotkového vektoru :

$$\vec{r}_o \cdot d\vec{r} \;=\; |\vec{r}_o| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha \;=\; 1 \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha$$



Z obrázku je zřejmé, že skalární součin je **průmětem** diferenciálu průvodiče $d\vec{r}$ do směru průvodiče $\vec{r}$ (do směru jeho jednotkového vektoru) a že je tedy vlastně roven **diferenciálu velikosti průvodiče** dr :

$$\vec{r}_o \cdot d\vec{r} \;=\; |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha \;=\; dr$$

Tím se výrazně zjednoduší výpočet vykonané práce, neboť integrál již neobsahuje vektorové veličiny :

$$A \;=\; \kappa M m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{dr}{r^2} \;=\; \kappa M m \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} \;=\; \kappa M m \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) \;=\; -\frac{\kappa M m}{r_2} \;+\; \frac{\kappa M m}{r_1}$$

Z výsledku vidíme, že vykonaná práce vůbec nezávisí na dráze (na jejím tvaru), ale závisí pouze na počátečním a koncovém bodu dráhy.

Dále si představme, že bychom umožnili **zpětný pohyb** tělesa z koncového bodu do bodu počátečního a již bychom tento pohyb nijak neovlivňovali, tj. nechali bychom **pracovat sílu gravitačního pole** - pak by vykonaná práce byla **stejně veliká** – a my tak svoji původně vykonanou práci „**dostaneme zpět**“ :

$$\int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; A$$

Vnější silou původně vykonaná práce A je tedy jakoby uschována - **zakonzervována** v koncovém bodu dráhy $\vec{r}_2$ a **těleso** (vlastně přesně řečeno **silové pole**) má v tomto místě **schopnost** vykona**t** **stejně velikou práci** (při návratu do výchozího místa).

Silové pole s takovou význačnou vlastností, která umožňuje zachování, zakonzervování vykonané práce, se nazývá *konzervativní silové pole* .

Tato **schopnost tělesa vykonat práci** , spojená s jeho (koncovou) **polohou** , se nazývá ***potenciální energie*** tělesa (hmotného bodu) a její **velikost** se definuje jako **velikost této práce** , tj. práce vykonané tělesem při přesunu do polohy počáteční.
(Tuto práci spojujeme s daným tělesem, v principu ji ovšem konají síly pole – a rovná se také práci vykonané námi - vnější silou - při původním pohybu z počátečního do koncového bodu).

Protože vykonaná práce nezávisí na tvaru dráhy mezi oběma body, počátečním a koncovým, je potenciální energie **jednoznačnou funkcí místa** $\vec{r}_2$ (tento koncový bod původně zvolené dráhy je ovšem jako obecně **proměnná** veličina ve funkci zcela libovolným bodem v prostoru, píšeme ho tedy obecně dále bez indexu) a samozřejmě je **také funkcí místa** $\vec{r}_1$ (zde je namístě ponechání indexu, neboť tento bod je sice také obecně zcela libovolný, ale při řešení daného problému se předem zvolí a ve funkci dále vystupuje jako konstanta, matematicky to je vlastně **parametr** funkce).

Bodové těleso (hmotný bod) má tedy v daném místě $\vec{r}$ vzhledem k místu $\vec{r}_1$ potenciální energii :

$$\boxed{W_p(\vec{r},\vec{r}_1) = -\frac{\kappa M m}{r} + \frac{\kappa M m}{r_1}}$$

gravitační potenciální energie (obecný tvar)

Kvůli zásadnímu významu této veličiny zopakujme znovu : ***gravitační potenciální energie je definována jako práce, kterou vykoná gravitační pole při pohybu tělesa z daného místa $\vec{r}$ do zvoleného výchozího místa $\vec{r}_1$*** (a je také rovna práci , kterou musí nejprve vykonat vnější síla při přesunu tělesa opačným směrem - z výchozího místa do daného místa).

Poznámka : Ze střední školy si jistě pamatujete jednoduchý vzorec pro potenciální energii :

$$\boxed{W_p = mgh}$$

Není tento vztah v rozporu s naším posledním vzorcem?
Ukažte si na cvičení, že nikoliv, a že jde pouze o jeho limitní tvar.

A dále - zejména v teoretických výpočtech se pro potenciální energii většinou volí výchozí místo v **nekonečnu** , tj. matematicky zapsáno :

$$r_1 \rightarrow \infty$$

V této limitě je potom ve vztahu pro potenciální energii druhý člen nulový - zbavíme se tak závislosti na počátečním stavu tělesa (na jeho počáteční poloze) a dostáváme velmi jednoduchý tvar :

$$\boxed{W_p(\vec{r}\,) = -\frac{\kappa M\, m}{r}}$$

gravitační potenciální energie (speciální tvar)

Stanovme opět význam : ***je to práce, kterou vykoná gravitační pole při pohybu tělesa z daného místa*** $\vec{r}$ ***do nekonečna*** (a je také rovna práci, kterou musí nejprve vykonat vnější síla při přesunu tělesa opačným směrem - z nekonečna do daného místa).

S využitím posledního vztahu můžeme nyní snadno zapsat **původní vykonanou práci** (vnější silou) při přesunu tělesa mezi dvěma místy :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\frac{\kappa M\, m}{r_2} + \frac{\kappa M\, m}{r_1} = W_p(\vec{r}_2) - W_p(\vec{r}_1) = W_{p2} - W_{p1}$$

Práce potřebná pro přemístění tělesa mezi dvěma místy je tedy rovna **rozdílu potenciálních energií** mezi těmito místy. (Formálně stejný vztah platí při jakékoliv volbě výchozího místa $\vec{r}_1$, dokažte sami.)

Často používanou veličinou v gravitačním poli je také :

$$\boxed{\varphi(\vec{r}\,) = \frac{W_p}{m}}$$

gravitační potenciál

Význam gravitačního potenciálu je opět velmi názorný : ***Je to potenciální energie tělesa jednotkové hmotnosti - tedy práce gravitačního pole potřebná k přenesení tělesa jednotkové hmotnosti z daného místa do nekonečna.***

Pak lze zapsat vykonanou práci také pomocí rozdílu potenciálů mezi dvěma místy :

$$A = W_{p2} - W_{p1} = m\cdot(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Porovnejte příští semestr tento gravitační potenciál s potenciálem elektrostatickým, který je kvůli jeho častému používání v elektrotechnice samozřejmě daleko známější fyzikální veličinou.
Dále zavedeme pojem kinetické energie.

Kinetická energie

Nyní si budeme všímat změny pohybového stavu hmotného bodu, spojené s konáním práce mezi dvěma místy dráhy. Nejprve upravíme pohybovou rovnici :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Abychom dostali vztah pro elementární práci, vynásobíme rovnici skalárně diferenciálem průvodiče:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\,d\vec{v}\cdot\vec{v}$$

K úpravě vzniklého skalárního součinu na pravé straně použijeme vztah pro velikost vektoru :

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$$

Tuto rovnici derivujeme podle času, nebo jednodušeji diferencujeme :

$$2v\,dv = d\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot d\vec{v} = 2\,d\vec{v}\cdot\vec{v}$$

Dostaneme :

$$v\,dv = \vec{v}\cdot d\vec{v}$$

Což dosadíme do vztahu pro elementární práci :

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = m\,d\vec{v}\cdot\vec{v} = m\,v\,dv$$

Aby bylo možno jednoznačně stanovit souvislost s veličinami předchozího odstavce, budeme dále předpokládat, že práce se opět koná v **silovém poli gravitační síly** $\vec{F}$.

Výše uvedenou elementární práci na diferenciální dráze $d\vec{r}$ nechť tedy koná síla gravitačního pole a z rovnice (z její pravé strany) vidíme, že důsledkem je vznik diferenciálu, tj. přírůstku rychlosti hmotného bodu.

Konání práce silovým polem má tedy za následek zvyšování rychlosti tělesa (představte si například volný pád v gravitačním poli Země).

Předpokládejme konkrétně , že konáním práce působící silou pole $\vec{F}$ na nějaké dráze mezi počátečním bodem $\vec{r}_1$ a koncovým bodem $\vec{r}_2$ se zvýší rychlost tělesa (hmotného bodu) z hodnoty $\vec{v}_1$ na $\vec{v}_2$. Vykonaná práce tedy bude (její označení je ve shodě s označením práce gravitačního pole v předchozím odstavci o potenciální energii) :

$$A' = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Po dosazení za elementární práci můžeme lehce provést výpočet určitého integrálu :

$$A' = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m\,v\,dv = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = m\left[\frac{1}{2}v^2\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

Vidíme, že stejně jako u potenciální energie, ani tato práce **nezávisí na tvaru dráhy** , dokonce ani **nezávisí na poloze** počátečního a koncového bodu dráhy - důležitý je pouze **počáteční a koncový pohybový stav** tělesa (počáteční a konečná rychlost).

Můžeme konstatovat, že vykonaná práce je opět uskladněna, **zakonzervována** , tentokrát ovšem v **pohybovém stavu** tělesa – a to má tedy v tomto stavu opět schopnost vykonat stejně velikou práci (při návratu do původního pohybového stavu, tj. při zabrzdění tělesa).

Tato **schopnost tělesa vykonat práci** , spojená s jeho **pohybovým stavem** se pak nazývá ***kinetická energie*** tělesa. Abychom, stejně jako u potenciální energie, vyloučili závislost na počátečním stavu tělesa (nyní pohybovém), předpokládejme počáteční nulovou rychlost ($v_1 = 0$). Potom je druhý člen na pravé straně roven nule a kinetická energie je tedy definována jednoduchým vztahem :

$$\boxed{W_k(v) = \frac{1}{2} mv^2}$$

kinetická energie (hmotného bodu)

Kvůli zásadnímu významu této veličiny opět zopakujme : ***Kinetická energie je definována jako práce, kterou těleso (hmotný bod) hmotnosti m vykoná, když bude zabrzděno z rychlosti v do klidového stavu*** (a kterou nějaká působící síla, například silové pole, musí nejprve vykonat při uvedení tělesa z klidu do pohybu touto rychlostí v).

Pozn. : Nyní, při znalosti kinetické energie, už jistě rozumíme požadavku na velmi pomalé posouvání tělesa na dráze při definici energie potenciální.

S využitím veličiny kinetické energie pak také můžeme přepsat vztah pro **práci působící síly** (silového pole) do tvaru :

$$A' = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = W_k(v_2) - W_k(v_1) = W_{k2} - W_{k1}$$

Práce potřebná pro přemístění tělesa mezi dvěma místy (působící silou - silovým polem) je tedy rovna **rozdílu kinetických energií** mezi těmito místy.

Z předchozího odstavce ale také víme, že práci při přemístění tělesa lze rovněž vyjádřit **rozdílem potenciálních energií** mezi těmito místy ….. až nyní tedy vlastně matematicky uplatníme předpoklad, že těleso se pohybuje v silovém (gravitačním) poli :

$$A' = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{k2} - W_{k1} = -A = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{p1} - W_{p2}$$

Dostáváme tak vztah pro potenciální a kinetické energie hmotného bodu v počátečním a koncovém bodu dráhy :

$$W_{k2} - W_{k1} = W_{p1} - W_{p2}$$

Po přeskupení členů vznikne velmi zásadní rovnice pro <u>součet</u> obou energií v těchto bodech :

$$W_{p1} + W_{k1} = W_{p2} + W_{k2}$$

Počáteční a koncové body dráhy, stejně jako dráha sama, jsou ovšem v prostoru (v silovém poli) obecně <u>zcela libovolné</u> , potom tedy můžeme konstatovat, že :

Součet potenciální a kinetické energie má v jakémkoliv místě konzervativního silového pole stále stejnou hodnotu .

Tento součet se nazývá ***<u>celková mechanická energie</u>*** a dospěli jsme tak k velmi důležitému zákonu mechaniky :

$$\boxed{W = W_p + W_k = konst.}$$

<u>zákon zachování celkové mechanické energie</u>

Uvedený zákon byl odvozen pro **<u>hmotný bod</u>** , platí ovšem i pro všechny **<u>hmotné objekty</u>** (které jsou vlastně z hmotných bodů – atomů - složeny).

<u>Jediným předpokladem zákona zachování energie je konzervativní silové pole</u>.

Kromě <u>gravitačního</u> pole je <u>konzervativní</u> také pole **<u>elektrostatické</u>** a pole **<u>pružných sil</u>** , výpočty v těchto polích jsou tak díky platnosti zákona zachování mechanické energie velmi pohodlné.

Konzervativnost bohužel <u>nejeví</u> například pole **<u>magnetické</u>** a pole **<u>třecích</u>** sil.

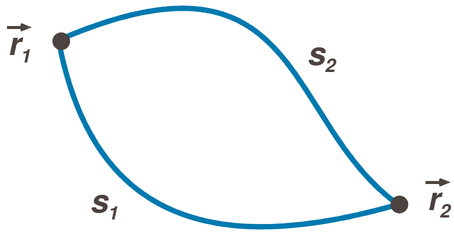
Důležitost konzervativnosti silového pole podtrhuje ještě následující krátký odstavec .

<u>Další vlastnosti konzervativního pole</u>

Víme už, že v takovém silovém poli nezávisí vykonaná práce při přesunu tělesa z místa $\vec{r}_1$ do místa $\vec{r}_2$ na tvaru dráhy. Jestliže tedy zvolíme **<u>dvě různé dráhy</u>** (křivky) s_1 a s_2 spojující oba body (viz obr.), pak musí být <u>práce</u> na těchto drahách naprosto <u>stejné</u> :

$$\boxed{\int_{\vec{r}_1(s_1)}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; \int_{\vec{r}_1(s_2)}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

nezávislost práce na dráze



U pravého integrálu pak přehodíme meze - tím změní znaménko - a převedeme ho na levou stranu :

$$\int_{\vec{r}_1(s_1)}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;+\; \int_{\vec{r}_2(s_2)}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; 0$$

Nyní lze oba integrály na levé straně rovnice <u>sečíst</u> (spojit) do <u>jediného integrálu</u> po <u>výsledné</u> křivce, složené z obou jednotlivých křivek $s = s_1 + s_2$ (jde o tzv. <u>**uzavřenou křivku**</u> a integrál má speciální označení) :

$$\boxed{\oint_{s=s_1+s_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; 0}$$

<u>integrál po uzavření křivce s</u>

Protože obě původní křivky byly <u>libovolné</u> a spojovaly <u>libovolné</u> dva body, platí integrál pro <u>**jakoukoliv**</u> uzavřenou křivku v prostoru silového pole a nepíšeme proto žádné označení této křivky :

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \;=\; 0}$$

<u>celková práce na libovolné uzavřené dráze</u> (je nulová)

<u>Slovní vyjádření :</u> ***Celková vykonaná práce na uzavřené dráze*** (při oběhu uzavřené křivky, tj. při návratu do výchozího místa) ***je nulová.***

<u>Pozn. :</u> Přitom samozřejmě na některých částech dráhy je vykonaná práce <u>kladná</u> a na jiných částech dráhy je <u>záporná</u>)

Tento vztah po mnoho staletí <u>velmi znesnadňoval</u> nadšeným vynálezcům konstrukci mechanického věčně pracujícího stroje - ***<u>perpertua mobile</u>*** (1. druhu).

V konzervativním elektrostatickém poli je výše uvedený vztah základem ***Kirchhofova zákona*** o oběhu uzavřené smyčky elektrického obvodu (součet napětí zdrojů a úbytků napětí na odporech je nulový – neboť všechno to jsou práce v elektrickém poli, kladné či záporné).
V termodynamice mají podobnou vlastnost ***stavové veličiny*** (to jsou stavové proměnné jako tlak, objem, teplota, ale jde hlavně o stavové funkce jako je vnitřní energie, entropie, entalpie, volná energie, atd., obecně ***termodynamické potenciály***), uzavřenou křivkou zde ovšem není skutečná dráha v prostoru, ale stejně geometricky uzavřená křivka ***kruhového děje*** v grafu stavových proměnných (například v pV-diagramu).

V příštím semestru (FYA2) si ještě ukážeme **další vztahy** , ve tvaru diferenciálních operátorových rovnic pro intenzitu a potenciál elektrostatického pole, které jsou ekvivalentní výše uvedeným integrálním vztahům :

$$\boxed{\vec{E} = -\, grad\,\varphi}$$

$$\boxed{rot\,\vec{E} = 0}$$

V našem gravitačním poli pak platí analogické rovnice pro gravitační intenzitu (nebo sílu) :

$$\boxed{\vec{K} = -\, grad\,\varphi}$$

$$\boxed{rot\,\vec{K} = 0}$$

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 02/2006**
rev. 02/2007

Dynamika soustavy hmotných bodů

Tento velmi důležitý fyzikální pojem slouží ke studiu a modelování pohybu reálných objektů složených z nepatrných hmotných částic (tělesa pevná, kapalná i plynná), nebo soustav těles, jejichž velikosti lze pro přibližné řešení zanedbat (sluneční soustava).

Definujme základní parametry ***soustavy hmotných bodů*** :

1. hmotný bod …. hmotnosti m_1 …. má polohu $\vec{r}_1$ …. rychlost $\vec{v}_1$ …. a hybnost $\vec{p}_1 = m_1\,\vec{v}_1$

2. hmotný bod …. hmotnosti m_2 …. má polohu $\vec{r}_2$ …. rychlost $\vec{v}_2$ …. a hybnost $\vec{p}_2 = m_2\,\vec{v}_2$

3. hmotný bod …. hmotnosti m_3 …. má polohu $\vec{r}_3$ …. rychlost $\vec{v}_3$ …. a hybnost $\vec{p}_3 = m_3\,\vec{v}_3$

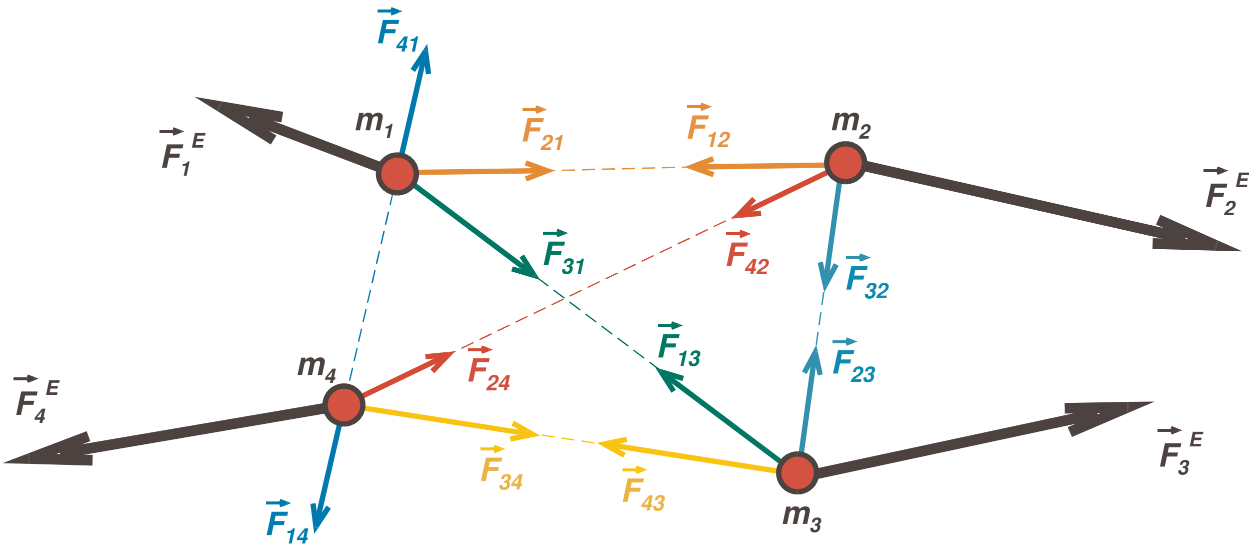
4. hmotný bod …. hmotnosti m_4 …. má polohu $\vec{r}_4$ …. rychlost $\vec{v}_4$ …. a hybnost $\vec{p}_4 = m_4\,\vec{v}_4$

……..

k-tý hmot.bod …. hmotnosti m_k …. má polohu $\vec{r}_k$ …. rychlost $\vec{v}_k$ …. a hybnost $\vec{p}_k = m_k\,\vec{v}_k$

……..

N-tý hmot.bod …. hmotnosti m_N …. má polohu $\vec{r}_N$ …. rychlost $\vec{v}_N$ …. a hybnost $\vec{p}_N = m_N\,\vec{v}_N$



Uvažme dále, **jaké síly působí** na libovolný hmotný bod soustavy (například na druhý, viz obr.) :

1) od objektů vně soustavy – tzv. ***vnější síly*** ($\vec{F}_2^E$)

2) od ostatních hmotných bodů soustavy – tzv. ***vnitřní síly*** ($\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{32}$, $\vec{F}_{42}$, ….. , $\vec{F}_{N2}$)

Pro každý hmotný bod pak napíšeme Newtonovu pohybovou rovnici (v nějaké inerciální souřadné soustavě) :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 = \vec{F}_1^E + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \ldots.. + \vec{F}_{N1}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 = \vec{F}_2^E + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} + \ldots.. + \vec{F}_{N2}$$

$$\frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{F}_3 = \vec{F}_3^E + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{43} + \ldots.. + \vec{F}_{N3}$$

$$\frac{d\vec{p}_4}{dt} = \vec{F}_4 = \vec{F}_4^E + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34} + \ldots.. + \vec{F}_{N4}$$

....

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_k = \vec{F}_k^E + \vec{F}_{1k} + \vec{F}_{2k} + \vec{F}_{3k} + \ldots.. + \vec{F}_{Nk}$$

....

$$\frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_N = \vec{F}_N^E + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_{2N} + \vec{F}_{3N} + \ldots.. + \vec{F}_{(N-1)N}$$

Dostáváme tak celkem N rovnic, které **<u>všechny sečteme</u>** dohromady (tj. sečteme všechny jejich levé strany a všechny jejich pravé strany) :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \frac{d\vec{p}_3}{dt} + \ldots. + \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_1^E + \vec{F}_2^E + \vec{F}_3^E + \ldots. + \vec{F}_N^E + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{N} \vec{F}_{jk}$$

<u>Poslední člen</u> na pravé straně je formálně zapsaný **<u>součet všech vnitřních sil</u>** v naší soustavě hmotných bodů.

Podle 3. Newtonova zákona ke **<u>každé</u>** jednotlivé **<u>vnitřní síle</u>** v tomto součtu <u>vždy existuje</u> její stejně veliká a opačně orientovaná **<u>reakce</u>** (viz obr.) :

$$\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}$$

Součet těchto dvou sil je tedy vždy nulový :

$$\vec{F}_{jk} + \vec{F}_{kj} = 0$$

Protože nezáleží na pořadí sčítanců, můžeme si představit, že sečtení všech vnitřních sil se uskuteční právě <u>po těchto dvojicích</u> , což vede k jednoznačnému výsledku celého tohoto součtu :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{N} \vec{F}_{jk} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{N} (\vec{F}_{jk} + \vec{F}_{kj}) = 0}$$

<u>součet všech vnitřních sil je nulový</u>

Protože **vnitřní síly** soustavy hmotných bodů ve většině případů **neznáme** a pro jejich velký počet ani nelze počítat s jejich například změřením, potom jejich výsledná „nulovost“ vlastně otevírá **jedinou možnou cestu** , jak pokračovat v řešení naší „součtové rovnice“ , která má nyní výrazně zjednodušenou pravou stranu :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \frac{d\vec{p}_3}{dt} + \dots + \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_1^E + \vec{F}_2^E + \vec{F}_3^E + \dots + \vec{F}_N^E$$

Jestliže definujme nové fyzikální veličiny :

$$\boxed{\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_N = \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt}}$$

celková hybnost soustavy

$$\boxed{\vec{F}^E = \vec{F}_1^E + \vec{F}_2^E + \vec{F}_3^E + \dots + \vec{F}_N^E = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^E}$$

výsledná vnější síla

Potom po úpravě levé strany rovnice, za použití základních pravidel o derivaci (součtu funkcí), vznikne velmi jednoduchý vztah, podobný „obyčejné“ pohybové rovnici pro (jeden) hmotný bod :

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^E}$$

1. věta impulzová

Slovní vyjádření : ***Časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů (za jednotku času) je rovna výsledné vnější síle.***

Nebo jinak : ***Změnu celkové hybnosti soustavy je možno dosáhnout pouze pomocí vnějších sil, tj. sil působících z okolí soustavy.***

Tedy **jakkoliv velké síly vnitřní** (***jakékoliv povahy*** – mechanické, elektromagnetické, chemické, …a ***jakéhokoliv charakteru*** – síly působící pomalu, rychle, explosivně,…) **nikdy nedokážou změnit celkovou hybnost soustavy** (i když samozřejmě změní jednotlivé hybnosti hmotných bodů).

Pozn. : Nezapomeňme, že tento významný a jednoduchý teoretický vztah byl dosažen jen díky platnosti **třetího Newtonova zákona** - zákona akce a reakce.

Bohužel **formální jednoduchost** **první impulzové věty** je „vykoupena“ **komplikovaností veličin** na obou stranách rovnice (jsou tvořeny součtem obrovského počtu jednotlivých členů – u reálných těles řádu Avogadrova čísla) , a proto také **není ihned zřejmé, jaký je její praktický význam**.

Situace se více vyjasní teprve po zavedení pojmu **hmotný střed (těžiště)** soustavy :

Uvažme, že v 1. větě impulzové jsou vlastně *všechny vnější síly* nahrazeny **jedinou výslednou silou** - a *všechny hybnosti soustavy* nahrazuje **jediná výsledná hybnost** .

Pokusme se proto také *všechny hmotné body* nahradit **jediným hmotným bodem** , kterému bychom přiřadili výslednou hybnost a ve kterém by bylo působiště výsledné síly.

Tento myšlený hmotný bod - ***hmotný střed (těžiště) soustavy*** – který bude „reprezentovat" celou soustavu hmotných bodů, musí mít rovněž definovanou svoji hmotnost - jistě ji položíme rovnou celkové hmotnosti všech hmotných bodů soustavy :

$$\boxed{m_o = m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N = \sum_{k=1}^{N} m_k}$$

hmotnost těžiště

Jestliže dále označíme :

$$\boxed{\vec{r}_o}$$

poloha (průvodič) *těžiště*

Pak můžeme stanovit rychlost těžiště jako derivaci jejího průvodiče :

$$\boxed{\vec{v}_o = \frac{d\vec{r}_o}{dt}}$$

rychlost *těžiště*

Také hybnost těžiště můžeme standardně podle definice vyjádřit jako :

$$\boxed{\vec{p}_o = m \cdot \vec{v}_o = m\,\frac{d\vec{r}_o}{dt}}$$

hybnost těžiště

A podle výchozí úvahy se tato hybnost musí rovnat celkové hybnosti soustavy :

$$\boxed{\vec{p}_o = \vec{P}}$$

hybnost těžiště je rovna celkové hybnosti

Po dosazení na obou stranách :

$$m\,\frac{d\vec{r}_o}{dt} = \sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt}$$

A použitím základních pravidel o derivacích dostaneme rovnici :

$$\frac{d}{dt} m\vec{r}_o = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k$$

Z rovnosti derivací pak plyne rovnost funkcí – ale až na libovolnou konstantu :

$$m\vec{r}_o = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k + konst$$

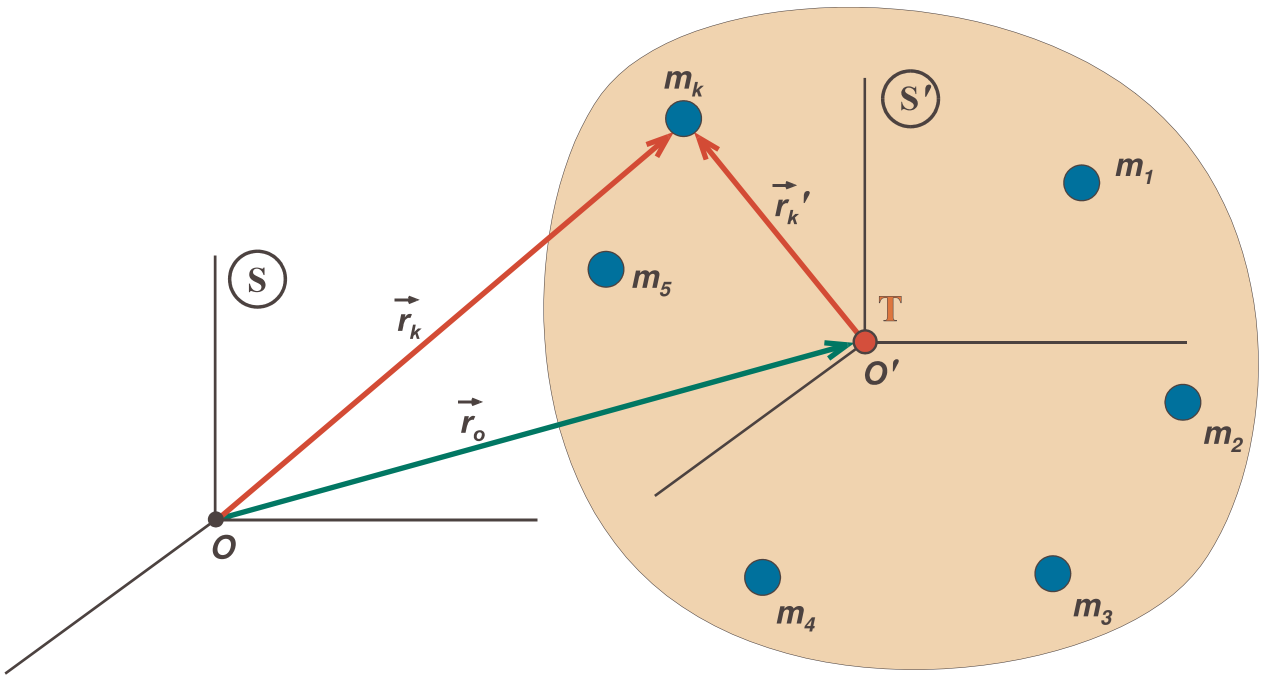
Při standardní volbě **nulové konstanty** pak obdržíme běžně používaný vztah pro polohu hmotného středu (těžiště) soustavy hmotných bodů :

$$\boxed{\vec{r}_o = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k}$$

poloha hmotného středu (těžiště) soustavy

Původně **libovolná konstanta** vlastně znamenala, že za působiště výsledné síly by bylo možno považovat **jakýkoliv bod** v prostoru, ale volba nulové konstanty přináší následující **význačnou vlastnost** těžiště soustavy hmotných bodů :

K jejímu objasnění použijeme tzv. ***těžišťovou soustavu*** souřadnic (můžeme ji označit S'), tj. takovou soustavu kartézských os, jejíž počátek O' položíme právě do těžiště soustavy hmotných bodů (viz obr.) :



V této vztažné soustavě je ale průvodič těžiště nulový :

$$0 = \vec{r}_o{}' = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k{}'$$

A tedy platí (po vynásobení rovnice hmotností) :

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k{}' = 0$$

Nyní ještě vynásobíme sumu vektorově zprava - tj. každý její člen - vektorem tíhového zrychlení :

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k{}' \times \vec{g} = 0$$

A po přesunu skaláru ve vektorovém součinu vznikne už velmi názorný vztah :

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k' \times m_k \vec{g} = 0$$

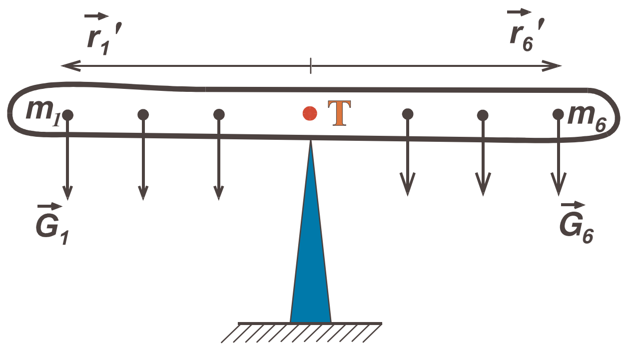
Protože součiny tíhového zrychlení a hmotností jednotlivých bodů jsou **tíhy** těchto hmotných bodů, můžeme nakonec napsat :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k' \times \vec{G}_k = 0}$$

rovnováha momentů tíhových sil vzhledem k těžišti

Tento vztah znamená, že **součet momentů tíhových sil** všech hmotných bodů soustavy vzhledem k těžišti je **nulový** . Tíhové (gravitační) síly jsou vnější síly dané soustavy a dostáváme tak jednu z podmínek klidové ***rovnováhy tělesa*** (viz následující kapitola „Aplikace impulsových vět").

Jak v následující kapitole dále uvidíte, je druhou podmínkou rovnovážného stavu ještě rovnováha působících sil, tedy **nulový součet všech vnějších sil** , což se dá zajistit **podepřením** tělesa v těžišti (nebo jeho zavěšením v těžišti - uvažte, že tím se nezmění nulovost momentů) - pak soustava hmotných bodů (těleso) musí zůstat v **klidu** (viz obr.).



Těžiště je tak „***rovnovážným bodem***" tělesa, proto můžeme do něj jednoduše **umístit** vektor (celkové) **tíhy tělesa** jako výslednice gravitačních tíhových sil působících na všechny body tělesa – a to **bez dodatečného** silového momentu (ten bychom museli přidat při umístění tíhy do nějakého jiného bodu - viz opět následující kapitola). Tedy :

Těžiště tělesa je nejjednodušší působiště gravitační tíhy tělesa.

A také : **Těžiště je „rovnovážným bodem" tělesa.**

Dále uvažme : jestliže jsme definovali **těžiště** jako hmotný bod, ve kterém je soustředěna **hmotnost** celé soustavy hmotných bodů, jehož **hybnost** je rovna celkové hybnosti a na který působí **výslednice** vnějších sil - potom 1. věta se stává také ***pohybovou rovnicí*** tohoto hmotného bodu - tedy těžiště soustavy :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_o}{dt} = \vec{F}^E$$

Nebo zapsáno pomocí polohového vektoru těžiště :

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2} = \vec{F}^E}$$

pohybová rovnice těžiště

Slovní vyjádření : ***Těžiště se pohybuje jako hmotný bod o hmotnosti celé soustavy, na který působí výsledná vnější síla.***

Vyřešením této pohybové rovnice potom **můžeme získat dráhu těžiště** soustavy hmotných bodů (případně jeho okamžitou rychlost a zrychlení).

Dráha jediného bodu, byť bodu význačného, nemůže ovšem popsat obecně složitý pohyb celé soustavy - kromě **specifického případu** , když by se **všechny hmotné body** soustavy pohybovaly **stejným způsobem** (stejnou rychlostí) na geometricky **stejných drahách** jako **těžiště**.

Takový pohyb soustavy hmotných bodů (tělesa) je pak zcela určen pohybem těžiště a označuje se jako **posuvný pohyb – translace** tělesa. Můžeme tedy konstatovat :

První věta impulzová, jako pohybová rovnice těžiště, určuje translaci soustavy hmotných bodů.

Nebo jinak : **První impulzová věta je „pohybovou rovnicí translace".**

Dráhy hmotných bodů tělesa (a těžiště) mohou být při translaci jak **přímočaré** (např. vozidlo pohybující se na přímé dráze), tak i **křivočaré** (např. zavěšené lodičky na Ruském kole, balistické kyvadlo, kurzor počítačové myši na obrazovce).

Obecně je ale pohyb těles složitější než pouhá translace : Všimněme si například automobilu jedoucího po silnici – jeho těžiště přitom sice sleduje tvar silnice - pohybuje se tedy po nějaké spojité křivce dráhy , která určuje možnou translaci, ale auto jako celek rozhodně translaci nekoná, neboť jeho natáčení při změnách směru jízdy je vlastně „lokální" rotační pohyb .

S využitím znalostí o geometrii křivek lze průjezd auta zatáčkou popsat jako rotaci kolem svislé osy , která prochází středem příslušné oskulační kružnice (křivky **dráhy těžiště**). Tento popis nám sice zjevně ukazuje zásadně důležitou spojitost translačního pohybu (těžiště) s pohybem rotačním, ale jeho matematické vyjádření by bylo velmi komplikované .

Pozn. : Neboť kromě dráhy těžiště bychom museli stanovit ještě „dráhu" středu oskulační kružnice, která by asi přinesla nějaké potíže, například svou nespojitostí (v inflexních bodech dráhy těžiště), a rozhodně by neplatil základní tvar rovnice pro rotaci kvůli neinerciální soustavě souřadnic spojené se středem oskulační kružnice.

Naštěstí je ale také možné si namísto této „skutečné rotace" **představit** , že automobil v zatáčce koná **translační pohyb** (daný pohybem těžiště) a přitom se **současně** natáčí - tj. **rotuje** - kolem svislé osy, která **prochází těžištěm** .

Ukazuje se, že takový „ **rozklad obecného pohybu** " (pevného) tělesa na **translaci** (danou pohybem těžiště) a **rotaci** (kolem osy jdoucí těžištěm) je **vždy proveditelný** - u nejsložitějších prostorových pohybů je samozřejmě dráha těžiště tvořena 3-rozměrnou křivkou a směr rotační osy je obecně odlišný v každém místě této dráhy .

Obecný pohyb tělesa je složený z translace a rotace kolem osy jdoucí těžištěm.

Pozn. : Nahrazení rotační osy jdoucí středem oskulační kružnice myšlenou osou v těžišti je přitom jistě velmi výhodná, neboť u obecného křivočarého pohybu se poloha středu oskulační kružnice i její poloměr neustále mění. Matematický důkaz nezávislosti této rotace na translaci a z toho plynoucí jednoznačnosti rozkladu obecného pohybu je proveden v následující kapitole.

Naše **první impulzová věta** jako „**pohybová rovnice translace**" tedy popisuje pouze „jednu část" obecného pohybu soustavy hmotných bodů (tělesa).

To znamená, že pro popis „druhé části" obecného pohybu soustavy - pohybu rotačního - bude ještě nutno sestavit nějakou analogickou „**pohybovou rovnici rotace**".

Neměl by to být zásadně obtížný úkol, protože jsme již dříve, v kapitole „Dynamika hmotného bodu" odvodili tzv. **pohybovou rovnici pro rotaci** jednoho hmotného bodu :

$$\boxed{\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M}}$$

Tato rovnice jistě platí pro **libovolný hmotný bod** soustavy, uvědomme si tedy nejprve, jak máme formálně přesně definovat moment jeho hybnosti a moment síly , která na něj působí :

$$\boxed{\vec{b}_k = \vec{r}_k \times \vec{p}_k = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt}}$$ ***moment hybnosti k-tého bodu soustavy***

$$\boxed{\vec{M}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_k}$$ ***moment síly působící na k-tý bod soustavy***

Pohybovou rovnici pro rotaci nyní napíšeme pro každý hmotný bod soustavy (v nějaké inerciální soustavě souřadnic) a stejně jako při odvození první impulzové věty rozdělíme působící sílu na vnitřní a vnější :

$$\frac{d\vec{b}_1}{dt} = \vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1^E + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + ... + \vec{F}_{N1}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^E + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{31} + ...$$

$$\frac{d\vec{b}_2}{dt} = \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2^E + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + ... + \vec{F}_{N2}) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2^E + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{32} + ...$$

$$\frac{d\vec{b}_3}{dt} = \vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \vec{r}_3 \times (\vec{F}_3^E + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + ... + \vec{F}_{N3}) = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3^E + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{13} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{23} + ...$$

$$\frac{d\vec{b}_4}{dt} = \vec{M}_4 = \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \vec{r}_4 \times (\vec{F}_4^E + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + ... + \vec{F}_{N4}) = \vec{r}_4 \times \vec{F}_4^E + \vec{r}_4 \times \vec{F}_{14} + \vec{r}_4 \times \vec{F}_{24} + ...$$

……….

$$\frac{d\vec{b}_k}{dt} = \vec{M}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{r}_k \times (\vec{F}_k^E + \vec{F}_{1k} + \vec{F}_{2k} + ... + \vec{F}_{Nk}) = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^E + \vec{r}_k \times \vec{F}_{1k} + \vec{r}_k \times \vec{F}_{2k} + ...$$

……….

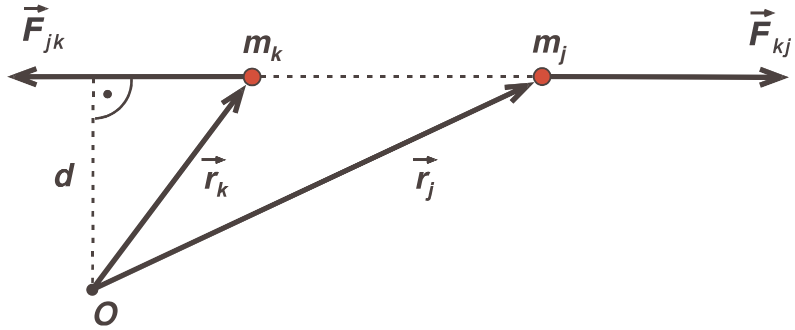
$$\frac{d\vec{b}_N}{dt} = \vec{M}_N = \vec{r}_N \times \vec{F}_N = \vec{r}_N \times (\vec{F}_N^E + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_{2N} + ... + \vec{F}_{(N-1)N}) = \vec{r}_N \times \vec{F}_N^E + \vec{r}_N \times \vec{F}_{1N} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2N} + ...$$

Dostáváme tak celkem N rovnic, které opět všechny sečteme dohromady :

$$\frac{d\vec{b}_1}{dt} + \frac{d\vec{b}_2}{dt} + \frac{d\vec{b}_3}{dt} + ... + \frac{d\vec{b}_N}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^E + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2^E + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3^E + ... + \vec{r}_N \times \vec{F}_N^E + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_{jk}$$

Poslední člen na pravé straně je formálně zapsaný ***součet momentů všech vnitřních sil*** v naší soustavě hmotných bodů. Tento součet je stejně **nulový** , tak jako byl nulový součet všech vnitřních sil, neboť ke každému momentu nějaké jednotlivé vnitřní síly existuje stejně veliký a opačně orientovaný moment její reakce (pokuste se dokázat s využitím obrázku) :

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_{jk} \;=\; \vec{r}_j \times \vec{F}_{kj}$$



Součtová rovnice se tedy zjednoduší na tvar :

$$\frac{d\vec{b}_1}{dt}+\frac{d\vec{b}_2}{dt}+\frac{d\vec{b}_3}{dt}+....+\frac{d\vec{b}_N}{dt}=\vec{r}_1\times\vec{F}_1^E+\vec{r}_2\times\vec{F}_2^E+\vec{r}_3\times\vec{F}_3^E+....+\vec{r}_N\times\vec{F}_N^E$$

Jestliže dále nově definujeme celkový moment hybnosti soustavy hmotných bodů a výsledný moment všech vnějších sil jako :

$$\boxed{\vec{B}=\vec{b}_1+\vec{b}_2+\vec{b}_3+\vec{b}_4+....+\vec{b}_N=\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k=\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times m_k\frac{d\vec{r}_k}{dt}}$$

celkový moment hybnosti

$$\boxed{\vec{M}^E=\vec{r}_1\times\vec{F}_1^E+\vec{r}_2\times\vec{F}_2^E+\vec{r}_3\times\vec{F}_3^E+.....+\vec{r}_N\times\vec{F}_N^E=\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k\times\vec{F}_k^E}$$

výsledný moment vnějších sil

Potom za použití základních pravidel o derivaci vznikne z naší součtové rovnice další velmi důležitý vztah, na první pohled dosti podobný „obyčejné“ rovnici pro rotaci (jednoho) hmotného bodu - to je dobré pro zapamatování, ale nepřehlédněte odlišnosti :

$$\boxed{\frac{d\vec{B}}{dt}=\vec{M}^E}$$

2. věta impulzová

Slovní vyjádření : ***Časová změna celkového momentu hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výslednému momentu vnějších sil.***

Podle první věty již víme, že jakkoliv veliké vnitřní síly (jakékoliv povahy a jakéhokoliv charakteru) **nikdy nedokážou změnit celkovou hybnost soustavy** - a nyní také vidíme, že tyto síly **nedokážou změnit ani celkový moment hybnosti soustavy** (i když samozřejmě změní jednotlivé momenty hybnosti hmotných bodů).

Nalezený vztah – **druhá věta impulzová** - má zásadní důležitost zejména při zkoumání **rotačního pohybu** soustav hmotných bodů, přičemž v případě rotace tuhého tělesa kolem pevné osy lze levou stranu rovnice ještě výrazně zjednodušit (viz kapitola „Dynamika tuhého tělesa“).
Její konkrétní použití pro popis rotace jako druhé části obecného pohybu soustav hmotných bodů pak bude specifikováno v následující kapitole „Aplikace impulzových vět“.
Můžeme tedy zjednodušeně tvrdit :

Druhá impulzová věta je „pohybovou rovnicí rotace“.

Uvědomme si závěrem, že jak 2. větu impulzovou – tak i 1.větu – jsme získali díky platnosti třetího Newtonova zákona (akce a reakce) a že platí v libovolné inerciální vztažné soustavě souřadnic .

Obě impulzové věty jsou tedy invariantní (neměnné) vzhledem ke Galileově transformaci – jak jinak, vždyť byly odvozeny přímo z Newtonových pohybových rovnic.

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 03/2006**

rev. 02/2007

Aplikace impulzových vět

Na základě všech Newtonových zákonů jsme odvodili dva základní vztahy klasické mechaniky - **impulzové věty** – které mají zásadní důležitost pro studium mechanického pohybu nejen vybraných soustav hmotných bodů, ale vlastně veškerého hmotného světa kolem nás.
V první řadě nyní dokončíme analýzu obecného pohybu těles, započatou v minulé kapitole :

a) Obecný pohyb soustavy hmotných bodů (tělesa)

Dospěli jsme již k zásadnímu poznatku, že obecný pohyb soustavy hmotných bodů (tělesa) lze vytvořit ze dvou relativně jednoduchých pohybů – translace a rotace kolem osy jdoucí těžištěm.

Translaci tělesa ve zvolené (inerciální) soustavě souřadnic pak dokonale a bez problémů popisuje **první impulzová věta** .
Jestliže si dále uvědomíme, že **druhá impulzová věta** popisuje rotaci kolem osy jdoucí počátkem zvolené (inerciální) souřadné soustavy, potom tedy pro požadovanou **rotaci kolem osy procházející těžištěm** musíme tuto impulsovou větu napsat a používat v takové vztažné soustavě souřadnic, jejíž počátek leží v těžišti – a to je přece naše známá a (pro stanovení rovnováhy gravitačních sil) již v minulé kapitole použitá - **těžišťová soustava souřadnic** .

A nyní tvrdě narazíme na jednu **zásadní potíž** : druhá impulzová věta byla odvozená a platí pouze v **inerciálních** soustavách - ale **těžišťovou soustavu nelze obecně považovat za inerciální** , neboť těžiště jako hmotný bod se pod vlivem vnějších sil může pohybovat po libovolné křivočaré dráze, tj. s libovolným zrychlením.
Musíme proto zjistit, **jak se změní druhá impulzová věta** v neinerciální těžišťové soustavě – tedy také jak se změní pohyb , který tento vztah popisuje (rotace kolem osy jdoucí těžištěm) - v závislosti na zrychleném pohybu těžiště (tj. na translaci tělesa).
Stručně řečeno – **jak závisí rotační pohyb** (kolem osy jdoucí těžištěm) **na translaci tělesa.**

Provedeme proto nyní převod - **transformaci** - druhé věty impulzové do **těžišťové** souřadné soustavy :
Nejprve napišme známý standardní tvar 2. věty impulsové v nějaké inerciální soustavě souřadnic S :

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}^{E}$$

Dále musíme dosadit za celkový moment hybnosti a výsledný moment vnějších sil. Podle definičních vztahů (z minulé kapitoly) platí :

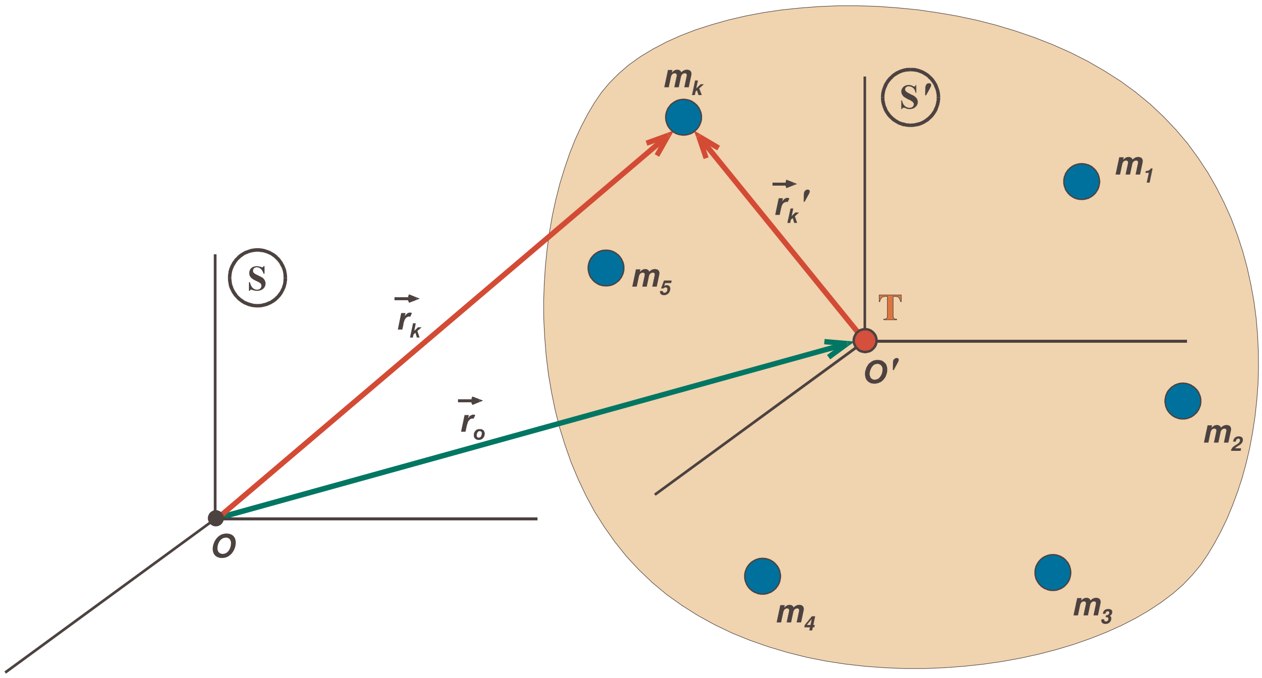
$$\vec{B} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 + \ldots + \vec{b}_N = \sum_{k=1}^{N} \vec{b}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt}$$

$$\vec{M}^E = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^E + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2^E + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3^E + \ldots + \vec{r}_N \times \vec{F}_N^E = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_k^E = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^E$$

Pro dosazení použijeme konkrétně poslední výrazy na pravých stranách, které obsahují průvodiče, a dostaneme :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{F}_k^E}$$

A nyní převedeme tento vztah do těžišťové soustavy souřadnic S' (viz obr.) :



Připomeňme si **obecný převodní vztah** mezi průvodiči hmotného bodu v obou soustavách, který jsme odvodili v kapitole „Inerciální a neinerciální soustavy" :

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

Jestliže uvážíme, že vektorem $\vec{R}$ spojujícím počátky obou soustav je zde průvodič těžiště $\vec{r}_o$, pak pro každý hmotný bod můžeme psát (viz obr.) :

$$\vec{r}_k = \vec{r}_o + \vec{r}_k'$$

A tento vztah dosadíme do výše připraveného tvaru 2. věty (v rámečku) :

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}(\vec{r}_o+\vec{r}_k')\times m_k\frac{d(\vec{r}_o+\vec{r}_k')}{dt}\right\} = \sum_{k=1}^{N}(\vec{r}_o+\vec{r}_k')\times\vec{F}_k^E$$

Upravme <u>výraz na levé straně</u> roznásobením dvojčlenů :

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times m_k\frac{d\vec{r}_o}{dt}\right\}+\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times m_k\frac{d\vec{r}_k'}{dt}\right\}+\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k'\times m_k\frac{d\vec{r}_o}{dt}\right\}+\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k'\times m_k\frac{d\vec{r}_k'}{dt}\right\}$$

Ve <u>druhém členu</u> provedeme vytknutí a ve <u>třetím členu</u> přesuneme skaláry (hmotnosti) a také vytkneme :

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times m_k\frac{d\vec{r}_o}{dt}\right\}+\frac{d}{dt}\left\{\vec{r}_o\times\sum_{k=1}^{N}m_k\frac{d\vec{r}_k'}{dt}\right\}+\frac{d}{dt}\left\{(\sum_{k=1}^{N}m_k\,\vec{r}_k')\times\frac{d\vec{r}_o}{dt}\right\}+\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k'\times m_k\frac{d\vec{r}_k'}{dt}\right\}$$

Nyní je zřejmé, že oba tyto členy musí být <u>nulové</u> , neboť v těžišťové soustavě vždy platí (viz výše vlastnosti těžiště) :

$$\sum_{k=1}^{N}m_k\vec{r}_k' = 0$$

Na levé straně rovnice tedy zbudou jen dva členy :

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times m_k\frac{d\vec{r}_o}{dt}\right\} + \frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k'\times m_k\frac{d\vec{r}_k'}{dt}\right\} = \sum_{k=1}^{N}(\vec{r}_o+\vec{r}_k')\times\vec{F}_k^E$$

Pokračujme dále v úpravách provedením derivace prvního členu levé strany a roznásobením dvojčlenu na straně pravé :

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{d\vec{r}_o}{dt}\times m_k\frac{d\vec{r}_o}{dt} + \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times m_k\frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k'\times m_k\frac{d\vec{r}_k'}{dt}\right\} = \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times\vec{F}_k^E + \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k'\times\vec{F}_k^E$$

První člen nalevo je opět nulový (rovnoběžné vektory) a vzniklý druhý člen se vyruší s prvním členem pravé strany, jak nahlédneme po vytknutí a s využitím pohybové rovnice těžiště (tj. 1. věty impulsové) :

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times m_k\frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2}=\vec{r}_o\times\left(\sum_{k=1}^{N}m_k\right)\cdot\frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2}=\vec{r}_o\times m\cdot\frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2}=\vec{r}_o\times m\cdot\vec{F}^E=\vec{r}_o\times\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^E=\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_o\times\vec{F}_k^E$$

Dostáváme tedy (již bez závorek) :

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k'\times m_k\frac{d\vec{r}_k'}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k'\times\vec{F}_k^E$$

Což je formálně naprosto stejná rovnice jako výchozí vztah, pouze v čárkovaných souřadnicích, tj. v souřadnicích těžišťové soustavy :

$$\boxed{\frac{d\vec{B}'}{dt} = \vec{M}'^{E}}$$

Vidíme, že z důvodu specifických vlastností hmotného středu se **tvar druhé věty impulzové** po přechodu do S' **vůbec nezměnil** - tento fyzikální zákon je tedy **invariantní** při transformaci do **těžišťové** souřadné soustavy - a v této soustavě pak **popisuje rotaci** vzhledem k **ose jdoucí** počátkem soustavy – **těžištěm** .

Jinak řečeno : protože se pohyb těžiště na výsledném vztahu vůbec neprojevuje, nemá tedy vliv ani na pohyb, který tento vztah popisuje, nebo-li :

Vlastní pohyb těžiště nemá vliv na rotaci soustavy hmotných bodů kolem osy jdoucí těžištěm.

A ještě jinak řečeno : **rotační pohyb** soustavy hmotných bodů kolem osy jdoucí těžištěm (který popisuje 2. impulzová věta) je **zcela nezávislý** na vlastním pohybu těžiště (popsaném 1. impulzovou větou) – tj. na **translačním pohybu** tělesa..

Tento principiální poznatek lze pak velmi účinně využít při popisu a sledování pohybů soustav hmotných bodů :

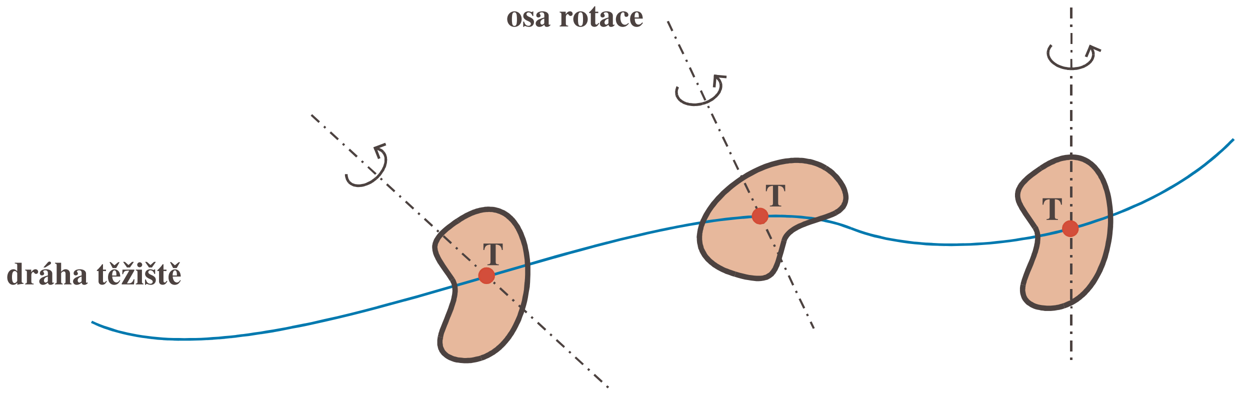
Jakýkoliv *obecný pohyb* soustavy hmotných bodů (tělesa) je vždy možné popsat jako složený ze dvou dílčích jednoduchých nezávislých pohybů , a to :

- z **translace - posuvného pohybu** tělesa, který je určen vlastním **pohybem těžiště** - jako hmotného bodu o hmotnosti celé soustavy na který působí výsledná vnější síla . Při tomto pohybu se všechny hmotné body soustavy pohybují stejným způsobem (stejnou rychlostí) na (geometricky) stejných drahách jako těžiště . Pro nalezení tohoto pohybu je potřeba vyřešit pohybovou rovnici těžiště – tj. první větu impulzovou :

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2} = \vec{F}^{E}}$$

- z **rotace - rotačního pohybu** tělesa kolem **osy jdoucí těžištěm** – způsobené výsledným momentem vnějších sil . Ke stanovení tohoto pohybu je potřeba v těžišťové soustavě řešit 2. větu impulzovou :

$$\boxed{\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}^{E}}$$



Prostudujme dále několik speciálních aplikací obou impulzových vět, kde získaných znalostí o obecném pohybu soustav hmotných bodů dobře využijeme :

b) Rovnováha tělesa (klidová)

Rovnováhu tělesa obvykle ztotožňujeme s jeho klidovým stavem (lze ale také řešit i rovnováhu pohybujícího se objektu, například cyklisty v zatáčce). Klidový stav tělesa ovšem znamená, že nedochází ani ke translačnímu , ani k rotačnímu pohybu tělesa, tj. **musí být rovna nule** jak **hybnost** , tak i **moment hybnosti** :

$$\boxed{\vec{P} = 0} \qquad \boxed{\vec{B} = 0}$$

Časové změny nulových funkcí jsou samozřejmě také nulové :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{B}}{dt} = 0$$

A z impulzových vět pak plyne i nulovost součtu všech vnějších sil i součtu všech momentů těchto sil :

$$\boxed{\vec{F}^E = \vec{F}_1^E + \vec{F}_2^E + \vec{F}_3^E + \dots + \vec{F}_N^E = 0}$$

podmínky rovnováhy tělesa

$$\boxed{\vec{M}^E = \vec{M}_1^E + \vec{M}_2^E + \vec{M}_3^E + \dots + \vec{M}_N^E = 0}$$

Rovnováha tělesa vyžaduje tak nejen **nulovou výslednici vnějších sil** ale také **nulový výsledný moment** vnějších sil (samozřejmě vzhledem k těžišti - ale uvažte, že neexistence rotačního pohybu musí znamenat i nulový silový moment vzhledem k libovolnému bodu).

Rovnováha tělesa znamená nejen rovnováhu vnějších sil, ale i rovnováhu jejich momentů.

Uvedené vztahy jsou základem ***statické mechaniky*** (statiky)

c) Uzavřená (izolovaná) soustava

Takové označení používáme pro soustavu hmotných bodů, na kterou z okolí nepůsobí **žádná vnější síla** . Je tedy nulová jak výslednice vnějších sil, tak výsledný vnější silový moment :

$$\boxed{\vec{F}^E = 0} \qquad \boxed{\vec{M}^E = 0}$$

Nesčíslné množství **aplikací** pak využívá toho, že uvedené vztahy mohou být splněny i ve **speciálním** případu - kdy na soustavu bude působit více vnějších sil (minimálně dvě), sice **nenulových** – které ale budou mít dohromady **nulovou výslednici** a také **nulový výsledný silový moment** (to jsou vlastně podmínky rovnováhy tělesa podle předchozího odstavce) :

$$\boxed{\vec{F}^E = \vec{F}_1^E + \vec{F}_2^E + \vec{F}_3^E + \dots + \vec{F}_N^E = 0} \qquad \boxed{\vec{M}^E = \vec{M}_1^E + \vec{M}_2^E + \vec{M}_3^E + \dots + \vec{M}_N^E = 0}$$

Podle impulzových vět jsou pak také nulové časové změny celkové hybnosti (také hybnosti těžiště, která se jí rovná) a celkového momentu hybnosti :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{p}_o}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{B}}{dt} = 0$$

A aplikace základních znalostí o derivacích nám dává jednoduchý výsledek – časovou neměnnost těchto veličin :

$$\boxed{\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_N = konst.}$$

zákon zachování hybnosti

$$\boxed{\vec{B} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 + \dots + \vec{b}_N = konst}$$

zákon zachování momentu hybnosti

$$\boxed{\vec{p}_o = konst}$$

zákon setrvačnosti (těžiště)

Tyto zákony často umožňují řešení komplikovaných pohybů soustav hmotných bodů, aniž by bylo nutno detailně sledovat chování jednotlivých bodů.

Pozn. : Stav klidové rovnováhy tělesa je zřejmě speciálním případem nalezených zákonů zachování, pro nulovou hodnotu pravých stran.

d) Ekvivalentní soustava sil

Vnější síly působící na nějaké těleso mohou být také podle potřeby nahrazeny **jiným souborem sil** , který ale musí mít na těleso **stejný pohybový účinek** – tj. bude vytvářet stejný **rotační** i **translační** pohyb. Z toho ovšem pak podle impulzových vět plyne, že tato nová soustava sil musí mít ***stejnou výslednici*** a také ***stejný výsledný silový moment*** jako původní vnější síly (vzhledem ke stejnému bodu).

Speciálně potom, při velmi častém **požadavku na maximální zjednodušení** vnějších sil, můžeme jakkoliv početný soubor sil nahradit **jedinou silou** - jejich výslednicí (vektorovým součtem) a můžeme ji umístit v **libovolném místě** – a **jediným silovým momentem** o velikosti rovné výslednému momentu původních sil vzhledem k tomuto požadovanému bodu.

Proto tedy - jestliže za **působiště** jediné výsledné síly zvolíme bod „**rovnováhy tělesa**“ - vůči němuž mají původní síly výsledný moment rovný nule , bude ekvivalentní soustavu sil tvořit **pouze tato jediná výslednice**.
Nalezení takového vztažného bodu je proto nutnou součástí návodu na ***skládání rovnoběžných sil*** , které jste prováděli již na střední škole.

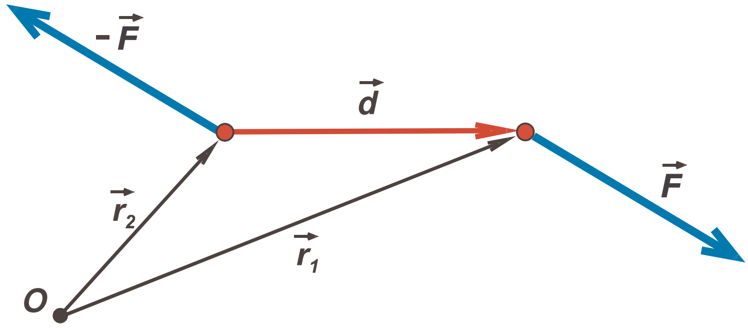
Speciálně v gravitačním poli (Země) je bodem rovnováhy ***těžiště*** tělesa, protože jsme v minulé kapitole odvodili, že součet momentů tíhových sil všech hmotných bodů je vzhledem k němu nulový :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k' \times \vec{G}_k = 0}$$

těžiště jako „bod rovnováhy“ gravitačních sil

Výslednice gravitačních sil – ***tíha tělesa*** - má tedy v těžišti **působiště** bez jakéhokoliv přídavného silového momentu.
Při dodržování stejných principů lze samozřejmě provádět také opačný proces - ***rozklad tíhy tělesa*** (například tíhu nějakého nosníku rozložíme na jednotlivé opěrné pilíře).

V konkrétních technických aplikacích ale vztažný bod většinou není možno zvolit, je již určen například skutečnou osou rotace a nemusí to vůbec být rovnovážný bod - pak je ovšem vždy nezbytné připojit k výslednici sil také nenulový silový moment .
K jeho vytvoření se často používá tzv. ***dvojice sil*** , tj. dvě stejně veliké, opačně orientované síly, neležící na stejné přímce (viz obr.).

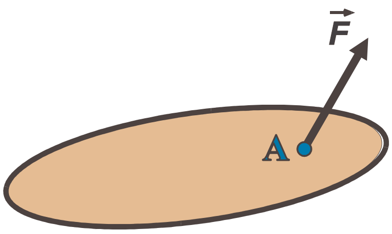


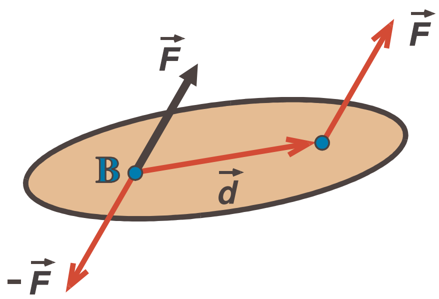
Výhoda je zřejmá – připojením dvojice sil se nezmění výslednice všech sil - a navíc - její silový moment je stejný vůči jakémukoliv bodu prostoru (pokuste se o důkaz) :

$$\boxed{\vec{M} = \vec{d}\times\vec{F}}$$

moment dvojice sil

Tak například i jen **jedinou** na těleso (v místě A) působící sílu můžeme **nahradit jinou silou** – stejně velikou, ale působící v jiném místě B - jde tedy vlastně o **posunutí síly do jiného působiště** , ale musíme **připojit dvojici sil** se stejným momentem jako měla původní síla vzhledem k tomuto novému bodu (viz obr.).





---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 03/2006**

rev. 02/2007

Dynamika pevného tělesa

Dále se budeme podrobněji věnovat ***tuhé soustavě*** hmotných bodů jako **modelu pevného tělesa**. Tento speciální případ soustavy hmotných bodů lze jednoduše charakterizovat neměnnými vzdálenostmi mezi jednotlivými body, které jsou důsledkem jejich konstantních průvodičů. Těžiště tuhé soustavy má tedy také neměnnou, konstantní polohu :

$$\boxed{\vec{r}_o = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \vec{r}_k = konst.}$$

těžiště tuhého tělesa

Pro pohyb pevného tělesa samozřejmě platí všechny rovnice , odvozené v předchozích kapitolách pro obecnou soustavu hmotných bodů :

- Při studiu chování tělesa za různých podmínek lze výhodně využít **rozkladu obecného pohybu** tělesa na **posuvný pohyb** daný pohybem těžiště a na **rotační pohyb** kolem osy jdoucí těžištěm.
- Rovněž jsou platné z obecného pohybu odvozené **podmínky klidové rovnováhy** tělesa, kdy nedochází ani k translačnímu, ani k rotačnímu pohybu tělesa.
- Stejně tak můžeme využívat vztahy odvozené pro **izolovanou (uzavřenou) soustavu** , na kterou nepůsobí žádné vnější síly.
- A samozřejmě používáme také **ekvivalentní soustavy sil** , které mají stejnou výslednici i stejný výsledný silový moment jako původní vnější síly.

Dále si ukážeme, jak neměnný tvar těles umožní zavedení nové fyzikální veličiny - **momentu setrvačnosti tělesa** - a jak tato veličina výrazně zjednoduší druhou impulzovou větu.

Nejprve se budeme zabývat **kinetickou energii** tělesa s využitím právě znalostí o rozkladu obecného pohybu na pohyb translační a pohyb rotační .
Nejjednodušší jistě bude výpočet v případě translace tělesa :

1) ***Kinetická energie při posuvném pohybu tělesa*** , kdy se všechny jeho body pohybují stejnou rychlostí jako těžiště, tj. platí :

$$\boxed{\vec{v}_k = \vec{v}_o = \vec{v}}$$

Kinetickou energii tělesa potom vypočítáme, s využitím tohoto vztahu, jako **součet** kinetických energií všech hmotných bodů (dále bude vytknut kvadrát rychlosti) :

$$W_{kin} = \sum_{k=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_k \cdot v_k^2 = \sum_{k=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_k \cdot v^2 = \tfrac{1}{2} v^2 \cdot \sum_{k=1}^{N} m_k$$

Jestliže použijeme vztah pro celkovou hmotnost tělesa, dostaneme nakonec :

$$\boxed{W_{kin} = \tfrac{1}{2} m v^2}$$

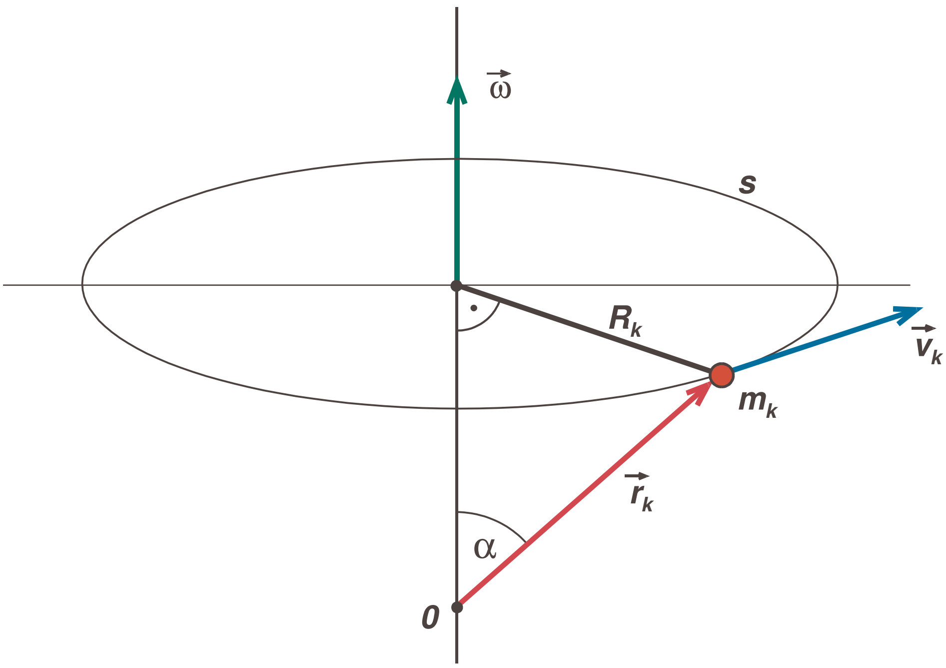
kinetická energie tělesa při translaci

Z tohoto vztahu je zřejmé, že kinetická energie tělesa při translaci je rovna **kinetické energii těžiště** .

Poněkud složitější než u translace jsou vždy výpočty spojené s rotací :

2) ***Kinetická energie při rotačním pohybu tělesa*** kolem osy procházející těžištěm (a předpokládejme jako dříve nejjednodušší případ **pevné osy**), která bude samozřejmě opět vyjádřena jako součet kinetických energií všech hmotných bodů, s využitím známého vztahu pro obvodovou rychlost kruhového pohybu:

$$\boxed{\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k}$$



Pro výpočet kinetické energie potřebujeme ovšem jen velikost tohoto vektoru (viz obr.) :

$$v_k = \left| \vec{\omega} \times \vec{r}_k \right| = \omega \cdot r \cdot \sin\alpha = \omega \cdot R_k$$

kde R_k je poloměr kruhového pohybu, tj. kolmá vzdálenost hmotného bodu od osy rotace. Kinetická energie všech hmotných bodů tedy bude (dosadíme a vytkneme konstanty):

$$W_{kin} = \sum_{k=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_k v_k^2 = \sum_{k=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_k (\omega \cdot R_k)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \cdot R_k^2 \right)$$

Nyní je právě čas pro zavedení nové fyzikální veličiny :

$$\boxed{J = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot R_k^{\ 2}}$$

moment setrvačnosti tělesa

Pozn. : Povšimněte si, že tato **skalární** veličina je určena rozložením hmotných bodů vzhledem k dané ose otáčení, při **jiné ose** otáčení (u stejného tělesa) nabývá tedy zcela **odlišné** hodnoty.

Vzniklá poněkud nepřehledná situace, kdy **jedno těleso** má vlastně **nekonečně mnoho momentů setrvačnosti** (pro nekonečně mnoho možných os rotace), pak byla v teoretické mechanice vyřešena zavedením **tenzoru** setrvačnosti.

S využitím momentu setrvačnosti pak vztah pro kinetickou energii rotace nabude jednoduchého tvaru, který je formálně podobný vzorci pro translaci :

$$\boxed{W_{kin} = \tfrac{1}{2} J\,\omega^2}$$

kinetická energie tělesa při rotaci

Celkem pak, pro **obecný pohyb** tělesa, lze kinetickou energii vyjádřit jako **součet** obou předchozích výrazů pro energie jeho translačního a rotačního pohybu :

$$\boxed{W_{kin} = \tfrac{1}{2} m v^2 + \tfrac{1}{2} J\,\omega^2}$$

kinetická energie pevného tělesa (při obecném pohybu)

Jak ale získáme potřebné veličiny (v a ω) pro dosazení do této rovnice?

Bude nutno najít a vyřešit „**pohybové rovnice tělesa**“ - pro jeho pohyb translační i rotační :

Z předchozích kapitol víme, že translace tělesa je určena pohybem těžiště . Proto rychlost v translačního pohybu tělesa, rovnou rychlosti pohybu těžiště, získáme vyřešením pohybové rovnice těžiště, kterou již známe z obecných vztahů pro soustavu hmotných bodů :

$$\boxed{m \cdot \frac{d^2 \vec{r}_o}{dt^2} = \vec{F}^E}$$

pohybová rovnice těžiště

Pozn. : Připomeňme, že uvedená rovnice vznikla z první impulzové věty poté, když jsme definovali těžiště a přiřadili jsme mu vlastnosti celé soustavy (tělesa) – hmotnost , hybnost a působící sílu. Těžiště tělesa se podle této rovnice pohybuje jako hmotný bod o hmotnosti celého tělesa, na který působí výsledná vnější síla.

Pohybová rovnice těžiště je proto první pohybovou rovnicí tělesa.

Dále už také víme, že existuje matematický vztah popisující rotační pohyb tělesa :

$$\boxed{\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{M}^{E}}$$

2. věta impulzová

Poznali jsme, že tato rovnice byla sice odvozena pro inerciální souřadné soustavy, ale že „náhodou“ (z důvodu vhodně zvolených vlastností těžiště) platí také v soustavě těžišťové - a může tedy vždy jednoznačně popisovat **rotaci kolem osy jdoucí těžištěm** .

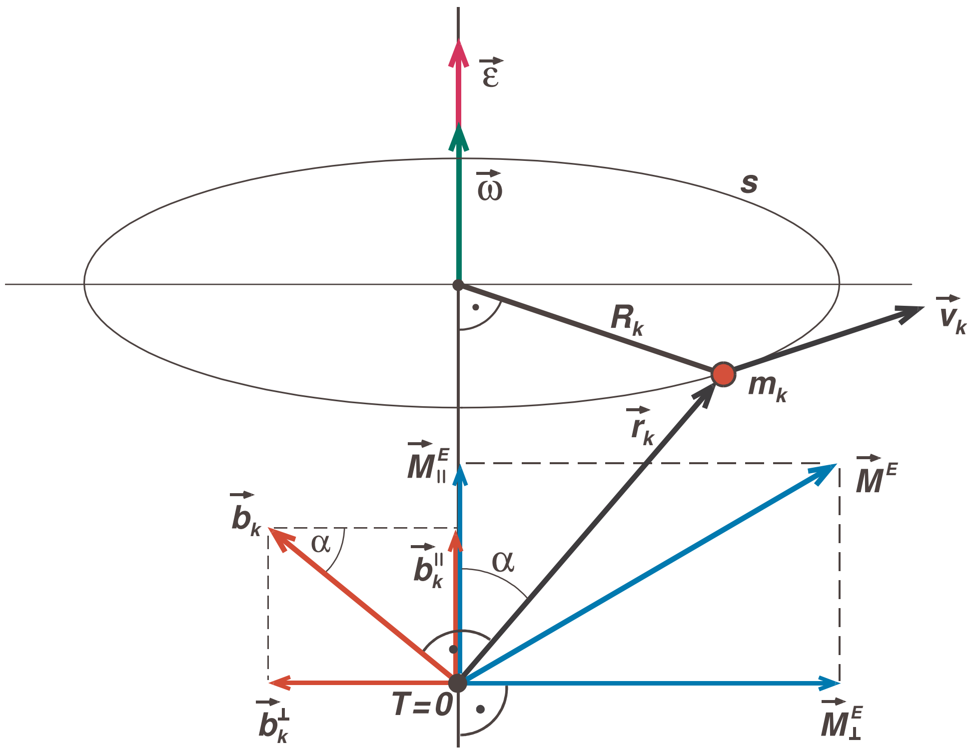
Potřebná úhlová rychlost ω se v této rovnici ale přímo nevyskytuje , naším dalším úkolem proto bude „transformace“ 2.věty do nových proměnných – úhlových veličin :

Napíšeme základní tvar 2.věty impulsové s rozepsáním jednotlivých momentů hybnosti :

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k = \vec{M}^{E}$$

A provedeme **rozklad** všech vektorů do **složky rovnoběžné** s osou rotace a do **složky kolmé** k této ose - správně v prostoru vlastně do dvou složek kolmých k ose rotace - ovšem na obrázku provedeném v „poloperspektivním“ zobrazení je pro jednoduchost zakreslena pouze jediná kolmice k ose (druhá by vedla kolmo k nákresně), stejně tak i rovnice obsahuje pouze jednu kolmou složku :

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}(\vec{b}_k^{\parallel} + \vec{b}_k^{\perp}) = \vec{M}_{\parallel}^{E} + \vec{M}_{\perp}^{E}$$



Levou stranu upravíme podle pravidla o derivaci součtu funkcí :

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k^{\,||} + \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k^{\,\perp} = \vec{M}_{||}^{E} + \vec{M}_{\perp}^{E}$$

Osy složek jsou v případě **pevné osy rotace** stabilně stanoveny (je to vlastně náš kartézský **těžišťový** souřadný systém), proto **složky vektorů i jejich časové změny mají stejný směr** (těchto os).

Z rovnosti vektorů na pravé a levé straně rovnice pak plyne i rovnost jejich složek, tedy platí :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k^{\,||} = \vec{M}_{||}^{E}} \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k^{\,\perp} = \vec{M}_{\perp}^{E}}$$

Věnujme se dále rovnoběžným složkám : Vypočítejme rovnoběžnou složku momentu hybnosti libovolného hmotného bodu (postačí její velikost) :

$$b_k^{||} = \left|\vec{b}_k\right| \cdot \sin\alpha = \left|\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k\right| \cdot \sin\alpha = (r_k \cdot m_k v_k \cdot 1) \cdot \sin\alpha = R_k \cdot m_k \cdot v_k$$

Použijeme ještě vztah pro velikost obvodové rychlosti kruhového pohybu :

$$v_k = \left|\vec{v}_k\right| = \left|\vec{\omega} \times \vec{r}_k\right| = \omega \cdot r_k \cdot \sin\alpha = \omega \cdot R_k$$

Po jejím dosazení bude rovnoběžná složka momentu hybnosti :

$$b_k^{||} = R_k \cdot m_k \cdot \omega \cdot R_k = m_k \cdot \omega \cdot R_k^2$$

Protože na levé i pravé straně rovnice jsou velikosti rovnoběžných vektorů, lze psát tuto rovnici vektorově :

$$\vec{b}_k^{\,||} = m_k \cdot R_k^2 \cdot \vec{\omega}$$

Tento vztah pak dosadíme do rovnice pro časovou změnu rovnoběžné složky momentu hybnosti :

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k^{\,||} = \vec{M}_{||}^{E}$$

A upravíme její levou stranu s využitím definice momentu setrvačnosti tělesa pro rotaci kolem dané osy :

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{b}_k^{\,||} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}m_k \cdot R_k^2 \cdot \vec{\omega} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N}m_k \cdot R_k^2\right) \cdot \vec{\omega} = \frac{d}{dt}(J \cdot \vec{\omega}) = J \cdot \frac{d}{dt}\vec{\omega} = J \cdot \vec{\varepsilon}$$

Vzniká tak jednoduchá rovnice, formálně podobná (dobré pro zapamatování) obyčejné Newtonově pohybové rovnici :

$$\boxed{J \cdot \vec{\varepsilon} \;=\; \vec{M}_{||}^{E}}$$

pohybová rovnice pro rotaci tělesa kolem pevné osy

Slovní vyjádření : ***úhlové zrychlení rotačního pohybu tělesa je přímo úměrné rovnoběžné složce výsledného momentu vnějších sil*** (a nepřímo úměrné momentu setrvačnosti tělesa).

Odvodili jsme tak : **druhou pohybovou rovnici tělesa**

ve specifické formě pro rotační pohyb kolem **pevné osy jdoucí těžištěm** tělesa (obrovský počet technických aplikací však dodává této „zjednodušené" rovnici vysoký stupeň důležitosti).

Pozn. : Kolmá složka (kolmé složky) momentu vnějších sil se snaží pouze změnit polohu osy rotace (vyvrátit ji), u teoretické pevné osy ovšem bezvýsledně.

Přechod k reálnému tělesu

Již dávno je známo, že reálná tělesa se skládají z atomů (molekul, iontů) o rozměrech přibližně 10^{-10} m, což je jistě velmi dobrá představa soustavy hmotných bodů.
Jejich obrovský počet - řádu Avogadrova čísla (10^{23} na 1 mol) - sice prakticky znemožňuje výpočty matematických součtů (sum), dovolí nám však představu hmoty jako **kvazispojitého prostředí** .
Pak lze definovat veličinu (dV je zvolený libovolný nepatrný element objemu a dm je jeho hmotnost) :

$$\boxed{\rho \;=\; \frac{dm}{dV}}$$

hustota hmoty

Slovní vyjádření : ***hustota hmoty je (číselně) rovna hmotnosti jednotkového objemu v daném místě zkoumaného tělesa*** (obecně je to skalární funkce místa).

Potom těleso rozdělené na veliký (nekonečný) počet objemových elementů je vlastně limitním případem soustavy hmotných bodů o hmotnostech :

$dm = \rho \cdot dV$

A všechny dříve probrané matematické sumy přecházejí v této limitě nekonečného počtu objemových elementů na **určité (objemové) integrály** , například :

$$\boxed{m \;=\; \iiint\limits_{V} \rho \cdot dV}$$

celková hmotnost tělesa

$$\boxed{\vec{r}_o = \frac{1}{m} \iiint_V \vec{r} \cdot \rho \cdot dV}$$

těžiště tělesa

$$\boxed{J = \iiint_V R^2 \cdot \rho \cdot dV}$$

moment setrvačnosti

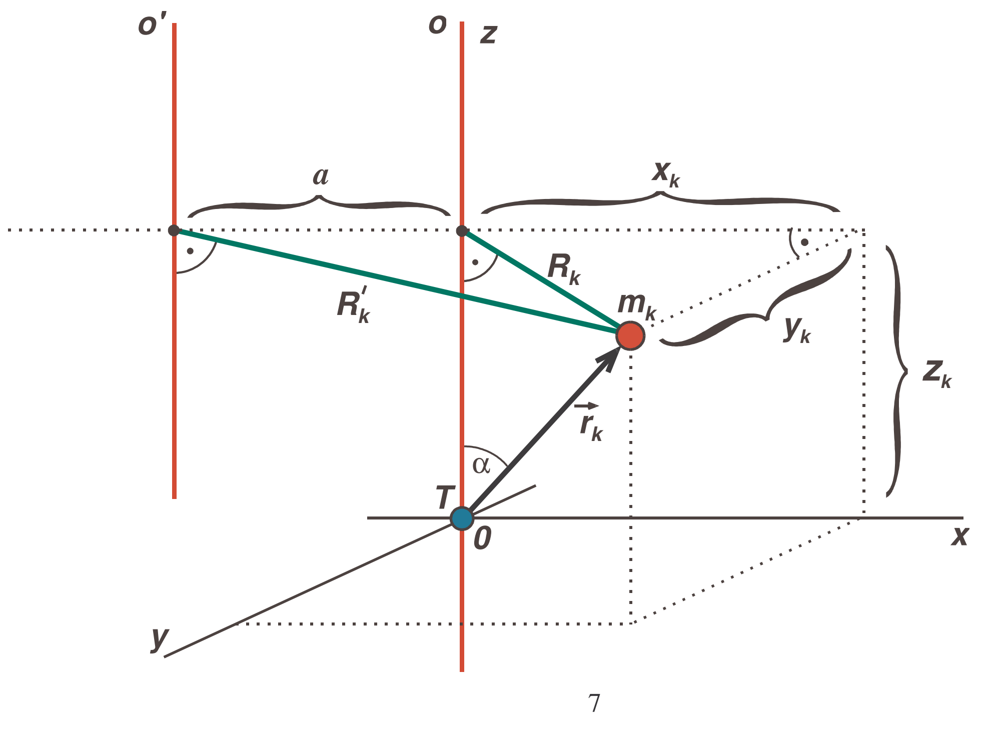
Tyto integrály, eventuálně i další podobné výrazy pro celkovou hybnost a celkový moment hybnosti, mohou být samozřejmě aplikovány nejen na pevná tělesa, ale i na kvazispojité prostředí kapalin a plynů (kdy ovšem nemá smysl například veličina momentu setrvačnosti).

Doplněk 1 : ***Steinerova věta***

Již při zavedení momentu setrvačnosti jsme si uvědomili jednoznačnou závislost této veličiny na rozložení hmotných bodů soustavy (tělesa) – konkrétně na jejich vzdálenosti od uvažované ose rotace. Je zřejmé, že s rostoucí vzdáleností tělesa od osy rotace, se moment setrvačnosti výrazně zvyšuje (ve vzorci jsou kvadráty vzdálenosti hmotných bodů od osy) a to neomezeně – a naopak při přibližování tělesa k rotační ose musí klesat k nějaké nenulové minimální hodnotě (kromě nereálného případu, kdy by všechny hmotné body tělesa ležely přesně v ose rotace).

Při rozboru tohoto problému se opět projeví výjimečnost hmotného středu tělesa, protože při zadaném směru – tj. pro všechny možné rovnoběžné osy rotace - je nejmenší právě moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm .

Představme si tedy nějakou osu rotace o a jinou osu rotace o' s ní rovnoběžnou (viz obrázek) :



Podle definice platí pro moment setrvačnosti vzhledem k ose o (viz první část této kapitoly) :

$$J = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot R_k^{\,2}$$

kde R_k je kolmá vzdálenost hmotného bodu m_k od osy rotace o .

Potom pro moment setrvačnosti vzhledem k jiné rovnoběžné ose o' bude platit analogicky:

$$J' = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot (R_k')^2$$

Kolmou vzdálenost R_k' stejného hmotného bodu od druhé osy rotace vyjádříme s využitím souřadnic na obrázku :

$$(R_k')^2 = (a + x_k)^2 + y_k^{\,2}$$

Tento výraz můžeme upravit umocněním a seskupením členů :

$$(R_k')^2 = (a + x_k)^2 + y_k^{\,2} = a^2 + x_k^{\,2} + 2 a x_k + y_k^{\,2} = a^2 + R_k^{\,2} + 2 a x_k$$

Neboť podle obrázku platí :

$$R_k^{\,2} = x_k^{\,2} + y_k^{\,2}$$

Nyní dosadíme do vztahu pro čárkovaný moment setrvačnosti , roznásobíme a rozdělíme členy :

$$J' = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot (R_k')^2 = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot (a^2 + R_k^{\,2} + 2 a x_k) = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot a^2 + \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot R_k^{\,2} + \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot 2 a x_k$$

V prvním a třetím členu na pravém straně lze vytknout konstanty :

$$J' = a^2 \cdot \sum_{k=1}^{N} m_k + \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot R_k^{\,2} + 2 a \cdot \sum_{k=1}^{N} m_k x_k$$

Dále můžeme v prvním členu sečíst hmotnosti všech hmotných bodů do celkové hmotnosti tělesa, druhý člen je přímo původní moment setrvačnosti vůči ose jdoucí těžištěm a třetí člen je nulový, neboť v těžišťové soustavě platí vektorová rovnice (plynoucí z nulového průvodiče těžiště) :

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k = 0$$

A tato rovnice je ekvivalentní třem skalárním rovnicím pro jednotlivé souřadnice :

$$\sum_{k=1}^{N} m_k x_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{N} m_k y_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{N} m_k z_k = 0$$

Dostáváme tak jednoduchý vztah :

$$\boxed{J' = J + m \cdot a^2}$$

Steinerova věta

Tento vztah nám dobře dokazuje **minimální hodnotu momentu setrvačnost pro osu jdoucí těžištěm** , neboť jakákoliv jiná (rovnoběžná) osa má moment setrvačnosti zvětšený o součin hmotnosti tělesa a kvadrátu vzdálenosti obou os (což je vlastně moment setrvačnosti těžiště tělesa k ose rotace).

Steinerova věta také výrazně zjednodušuje výpočty momentů setrvačnosti k libovolným rotačním osám (při znalosti momenty setrvačnosti vůči osám jdoucím těžištěm tělesa).

Doplněk 2 : ***Kyvadla***

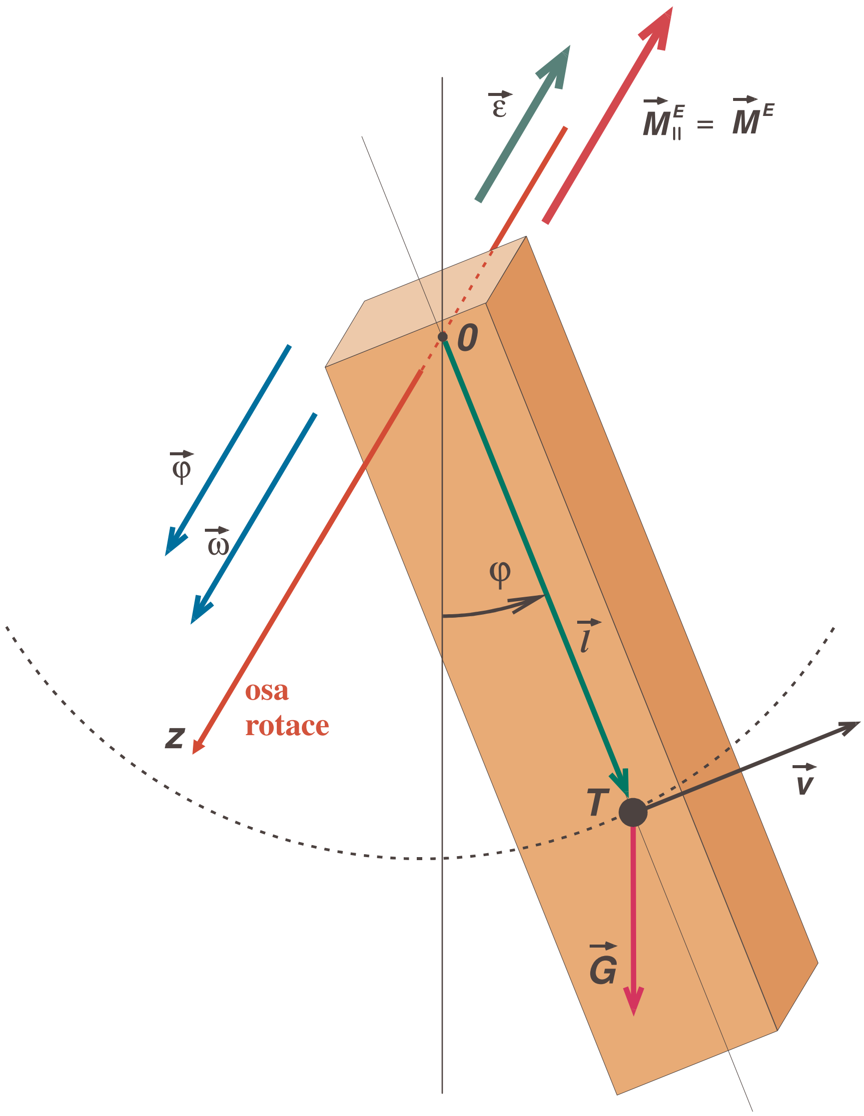
Fyzické kyvadlo

Nazýváme tak **jakékoliv těleso** , které je otočné (ideálně bez tření) kolem **pevné vodorovné osy** neprocházející těžištěm. Je jasné, že v klidové rovnovážné poloze je těžiště tělesa v nejnižší možné poloze (a je to místo jeho stabilní rovnováhy).
Jestliže kyvadlo z rovnovážné polohy vychýlíme (do nějaké krajní polohy) a následně uvolníme, objeví se moment vnější síly (tíhy tělesa), který působí „proti výchylce" – a vrací kyvadlo zpět do rovnovážné polohy.
Během tohoto pohybu se ovšem potenciální energie kyvadla vzniklá jeho vychýlením přeměňuje podle zákona zachování mechanické energie na energii kinetickou , takže se kyvadlo v dolní poloze nezastaví, ale pokračuje v pohybu na druhou stranu, dokud se jeho kinetická energie zase nepřemění zpět na energii potenciální (ve druhé krajní poloze) a opět se vrací k rovnovážné poloze, ….atd. - tak vzniká **periodický kmitavý pohyb** kyvadla.

Tento pohyb je ovšem principiálně pohybem **rotačním** , a tedy při jeho exaktním (kvantitativním) řešení musíme vycházet z rovnice pro rotační pohyb tělesa kolem pevné osy :

$$J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_{||}^{E}$$

Nejprve určíme směr a orientaci vektorových veličin v této rovnici, přitom využijeme našich znalostí vektorového zápisu úhlových veličin (z kapitoly „Kinematika hmotného bodu").
Na následujícího obrázku (který je pro větší názornost v perspektivním zobrazení) je kyvadlo zakresleno při výchylce doprava, kdy těžiště stoupá do pravé krajní polohy.



Počátek vztažné inerciální soustavy O je umístěn na pevné rotační ose o (do které můžeme položit jednu ze souřadných os, například osu z), polohový vektor těžiště T je označen jako $\vec{l}$.

Kladný směr odečtu opsaného úhlu φ je standardně zvolen proti směru hodinových ručiček (viz obr.). Základní výhodou pevné osy je to, že v ní leží všechny vektorové úhlové veličiny rotujícího tělesa (tj. všech jeho bodů) – vektor opsaného úhlu $\vec{\varphi}$, úhlová rychlost $\vec{\omega}$ a úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$.

Při rychlosti těžiště $\vec{v}$ podle obrázku (těleso se právě vychyluje z rovnovážné polohy doprava a jeho těžiště stoupá vzhůru) je kladná orientace vektorů $\vec{\omega}$ a $\vec{\varphi}$ definována podle standardní volby - aby spolu s vektorem poloměru kruhového pohybu (zde $\vec{l}$) a vektorem rychlosti $\vec{v}$ tvořily pravotočivý systém - tj. oba vektory směřují z nákresny k nám (v perspektivě na obrázku zprava doleva) – a stejně tak zvolíme kladný směr (rotační) osy z .

Rotace tělesa se ovšem zpomaluje (a nakonec se v pravém krajním bodě zastaví), úhlová rychlost $\vec{\omega}$ tedy klesá – proto je orientace vektoru úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$ právě opačná – v záporném směru osy z (do nákresny, viz obr.).

Poznámka : Zopakujte si za D.cv. vektorové definice úhlových veličin a promyslete, jak se budou při dalším pohybu kyvadla měnit jejich velikosti i orientace.

Jak víme z předchozí kapitoly, je právě těžiště nejjednodušším působištěm tíhy tělesa, která je jedinou vnější silou. Její moment je pak :

$$\vec{M}^{E} = \vec{l} \times \vec{G}$$

Uvážíme-li podle obrázku, že oba vektory $\vec{l}$ a $\vec{G}$ leží v jedné rovině (nákresně), kolmé k ose rotace, pak podle definice vektorového součinu také vektor silového momentu má přesně směr této osy (viz obrázek). Je tedy vektor silového momentu přímo roven své složce rovnoběžné s osou rotace (a také samozřejmě svojí z – ové složce)

$$\vec{M}^{E} = \vec{M}^{E}_{||}$$

A jeho velikost je (jako velikost vektorového součinu) :

$$M^{E} = M^{E}_{||} = l \cdot G \cdot sin\varphi = l \cdot m g \cdot sin\varphi$$

Orientace tohoto vektoru je ale **opačná** než orientace vektoru úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ a opsaného úhlu $\vec{\varphi}$ - má směr záporné části rotační osy, tj. osy z (směřuje do nákresny, viz obrázek). Proto je jeho z-ová souřadnice záporná a v absolutní velikosti rovná velikosti vektoru (souřadnice na ostatních osách x a y jsou samozřejmě nulové), tedy :

$$(M^{E})_z = (M^{E}_{||})_z = - \; l \cdot m g \cdot sin\varphi$$

Vidíme také, že orientace rovnoběžné složky momentu síly je naprosto stejná jako vektoru úhlového zrychlení $\vec{\varepsilon}$ - oba vektory tedy mají záporné z-ové souřadnice (a nulové souřadnice x a y).

Tyto výsledky jsou v dokonalé shodě s pohybovou rovnicí (jak jinak) :

$$J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}^{E}_{||}$$

protože při vždy kladném momentu setrvačnosti J znamená tato rovnice přímou úměru vektorů $\vec{\varepsilon}$ a $\vec{M}^{E}_{||}$ - tj. jejich stejný směr a orientaci.

Abychom mohli pohybovou rovnici pro rotaci konkrétně vyřešit, musíme ji rozepsat do souřadnic :

Protože souřadnice vektorů již máme rozmyšlené, je nám jasné, že dostaneme jedinou nenulovou rovnici, pro z-ové souřadnice :

$$J \cdot \varepsilon = - \; l \cdot m\,g \cdot \sin\varphi$$

Úhlové zrychlení můžeme standardně vyjádřit jako druhou derivaci opsaného úhlu :

$$J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - \; l \cdot m\,g \cdot \sin\varphi$$

Převedení na levou stranu a osamostatnění druhé derivace vede ke standardnímu tvaru diferenciální rovnice :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{l \cdot m\,g}{J} \cdot \sin\varphi = 0$$

Pokud zavedeme novou veličinu :

$$\boxed{\omega^2 = \frac{l \cdot m\,g}{J}}$$

a použijeme matematického formalismu pro označení derivace, vznikne nejjednodušší možný tvar rovnice :

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \sin\varphi = 0}$$

pohybová rovnice fyzického kyvadla *(obecná)*

Její řešení není jednoduché, nebudeme ho provádět, také z důvodu, že zásadní význam má zjednodušený tvar této rovnice – za předpokladu malých výchylek kyvadla (matematicky nekonečně malých), tj. :

$$\boxed{\varphi \rightarrow 0}$$

Pak totiž platí pro funkci sinus : $\boxed{\sin\varphi \cong \varphi}$

A dostaneme :

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \varphi = 0}$$

pohybová rovnice fyzického kyvadla *(pro malé výchylky)*

Tato rovnice je formálně matematicky stejná s rovnicí lineárního harmonického oscilátoru, kterou budeme teprve probírat v kapitole „Kmity a vlny“ .

$$\ddot{y} + \omega^2 \cdot y = 0$$

Přitom si ukážeme, že jejím obecným řešením pro výchylku y hmotného bodu je známá sinusovka :

$$y = y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_o)$$

V tomto vztahu je A amplituda kmitů - maximální hodnota výchylky, φ_o je fázová konstanta a ω je úhlová frekvence vyjádřená pomocí doby kmitu T nebo pomocí frekvence kmitů f :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

Řešení naší pohybové rovnice fyzického kyvadla tedy musí také být formálně stejná sinusovka, ale pro úhlovou výchylku :

$$\boxed{\varphi = \varphi(t) = A \cdot sin(\omega t + \varphi_o)}$$

řešení pohybové rovnice kyvadla *(pro malé výchylky)*

Fyzické kyvadlo tedy při malých výchylkách koná tzv. ***harmonické kmity*** s úhlovou frekvencí :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{l \cdot m g}{J}}}$$

úhlová frekvence fyzického kyvadla *(pro malé výchylky)*

Doba kmitu fyzického kyvadla je pak :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{l \cdot m g}}}$$

doba kmitu fyzického kyvadla *(pro malé výchylky)*

Doba kmitu je časovou **periodou** pohybu daného kmitavého pohybu, tj. **dobou za kterou se opakuje** nějaký (libovolný) pohybový stav - u kyvadla ji lze názorně popsat jako dobu pohybu kyvadla z jedné krajní polohy do druhé a zpět .

Často se také používá veličina **doba kyvu** – jako doba, za kterou se uskuteční jeden kyv, tj. pohyb kyvadla z jedné krajní polohy do druhé :

$$\boxed{T_k = \frac{T}{2} = \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{l \cdot m g}}}$$

doba kyvu fyzického kyvadla *(pro malé výchylky)*

Nezapomeňme, že uváděné vztahy platí přesně pouze v limitě pro nekonečně malé výchylky kyvadla. Při nenulových výchylkách se tyto doby odchylují, např. :

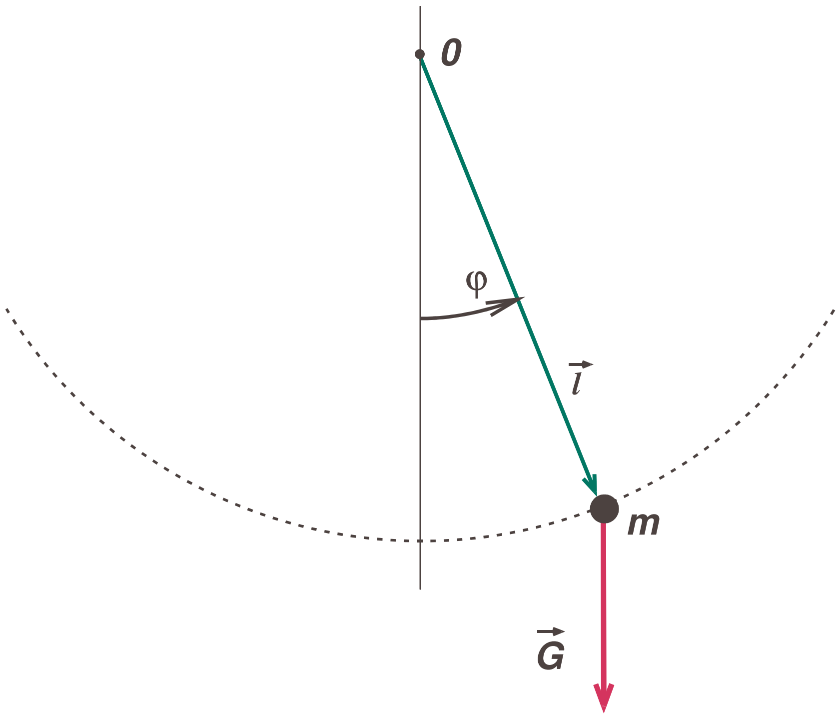
při amplitudě kmitů $A = 1°$ ..... o $0{,}002\ \%$

$5°$ .... $0{,}05\ \%$

$10°$ ...... $0{,}2\ \%$

Při praktických experimentech (měření) se doporučují maximální výchylky (amplitudy) do $5°$.

Speciálním, mezním případem fyzického kyvadla je tzv. ***matematické kyvadlo*** , které tvoří malá kulička hmotnosti m na velmi lehkém závěsu délky l , teoreticky můžeme říci, že to je „**hmotný bod na nehmotném tuhém vlákně**“ (viz obrázek).



Všechny výše uvedené vzorce zůstávají v platnosti a navíc můžeme lehce vypočítat moment setrvačnosti tohoto kyvadla (viz definici v první části této kapitoly) :

$$J = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot R_k^{\,2} = m \cdot l^2$$

Po dosazení do vztahu pro dobu kmitu dostaneme :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{l \cdot m\, g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot l^2}{l \cdot m\, g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dostáváme tak velmi zajímavý výsledek, že kmitání matematického kyvadla vůbec **nezávisí na hmotnosti** , ale je funkcí pouze délky jeho závěsu :

$$\boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

doba kmitu matematického kyvadla *(pro malé výchylky)*

Další veličinou (parametrem) v získaném vztahu je gravitační tíhové zrychleni (gravitační konstanta), naskýtá se tak možnost jeho stanovení ze změřené doby kmitu a z délky závěsu kyvadla.

Protože matematické kyvadlo je spíše abstraktní teoretický pojem a pokusy o jeho realizaci vedou k výrazným nepřesnostem, používá se k takovému měření gravitační konstanty kyvadlo fyzické.
Základní nevýhodou fyzického kyvadla je ovšem to, že do vzorce pro dobu kmitu potřebujeme znalost momentu setrvačnosti. To lze ale obejít následujícím způsobem :

Jestliže máme k dispozici fyzické kyvadlo s momentem setrvačnosti J (a dalšími parametry m a l) a toto kyvadlo má určitou dobu kmitu podle výše uvedeného vztahu :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{l \cdot m g}}$$

Pak jistě existuje nějaké (a to jediné) matematické kyvadlo s takovou délkou (označme ji l_{red}), že jeho doba kmitu je stejná :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_{red}}{g}}$$

Z rovnosti těchto vztahů pak plyne :

$$\boxed{l_{red} = \frac{J}{l \cdot m}}$$

redukovaná délka fyzického kyvadla

Slovně : ***Redukovaná délka fyzického kyvadla je taková délka*** (myšleného) ***matematického kyvadla, které má stejnou dobu kmitu jako dané fyzické kyvadlo.***

Při její znalosti bychom pak jistě mohli ze změřené doby kmitu kyvadla **určit gravitační tíhové zrychlení** v daném místě. Redukovanou délku jakéhokoliv fyzického kyvadla lze jistě principiálně vypočítat podle uvedeného vzorce z hmotnosti kyvadla, z jeho momentu setrvačnosti a ze vzdálenosti těžiště od osy otáčení. Takový výpočet by ale byl zatížen značnou chybou, plynoucí z přesnosti změření tvaru kyvadla, přesnosti jeho výroby a z vlastností použitého materiálu (homogenita), proto se stanovení redukované délky provádí následujícím experimentálním postupem :

Představme si, že u daného fyzického kyvadla ve vzdálenosti l_{red} od osy otáčení (na opačnou stranu od těžiště) vytvoříme **druhou osu** otáčení – vznikne tzv. ***reverzní kyvadlo*** (kyvadlo se dvěma osami). Pak je možno dokázat, že doba kmitu kolem této druhé osy bude přesně **stejná** jako kolem osy první .

Pozn. : Pokuste se sami odvodit - ukažte, že redukovaná délka pro kmity kolem druhé osy je stejná jak pro první osu, přitom použijte Steinerovu větu.

Je tedy také zřejmé, že k libovolné ose rotace fyzického kyvadla (kromě osy jdoucí těžištěm) vždy existuje druhá „reverzní“ osa se stejnou dobou kmitu.

Každé fyzické kyvadlo (tj. každé těleso) má proto nekonečně mnoho možných dvojic rotačních os se stejnými dobami kmitu (doba kmitu jedné dvojice os se samozřejmě liší od doby kmitu jiné dvojice).

Právě tuto úvahu můžeme dobře experimentálně využít : když u daného fyzického kyvadla nalezneme jakékoliv dvě různé osy , které mají stejné doby kmitu , pak jejich vzdálenost je rovná redukované délce tohoto kyvadla.

Tyto hodnoty můžeme pak dosadit do vzorce pro matematické kyvadlo :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_{red}}{g}}$$

A z něj lehce vypočítáme gravitační tíhové zrychlení :

$$\boxed{g = \frac{4\pi^2 \cdot l_{red}}{T^2}}$$

Hledání dvou os se stejnými dobami kmitů je ovšem také jistě zatíženo mnohými nepřesnostmi, neboť musíme posunovat osy, kontrolovat jejich rovnoběžnost a měřit jejich vzdálenost (a doby kmitu).

Proto se v praxi postupuje tak, že tyto **osy se předem vyrobí** a přesně se stanoví jejich neměnná vzdálenost. Při experimentu se pak **měří pouze doby kmitu kolem obou os** a **mění se moment setrvačnosti** kyvadla (nějakou posuvnou částí na kyvadle), **až se nalezne shoda jejich dob kmitu** (a tato doba se spolu se vzdáleností os dosadí do uvedené rovnice - viz úloha ve fyzikálním praktiku).

(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 03/2006**

rev. 03/2007 – přidán Doplněk 1 (Steinerova věta a Doplněk 2 (kyvadla)

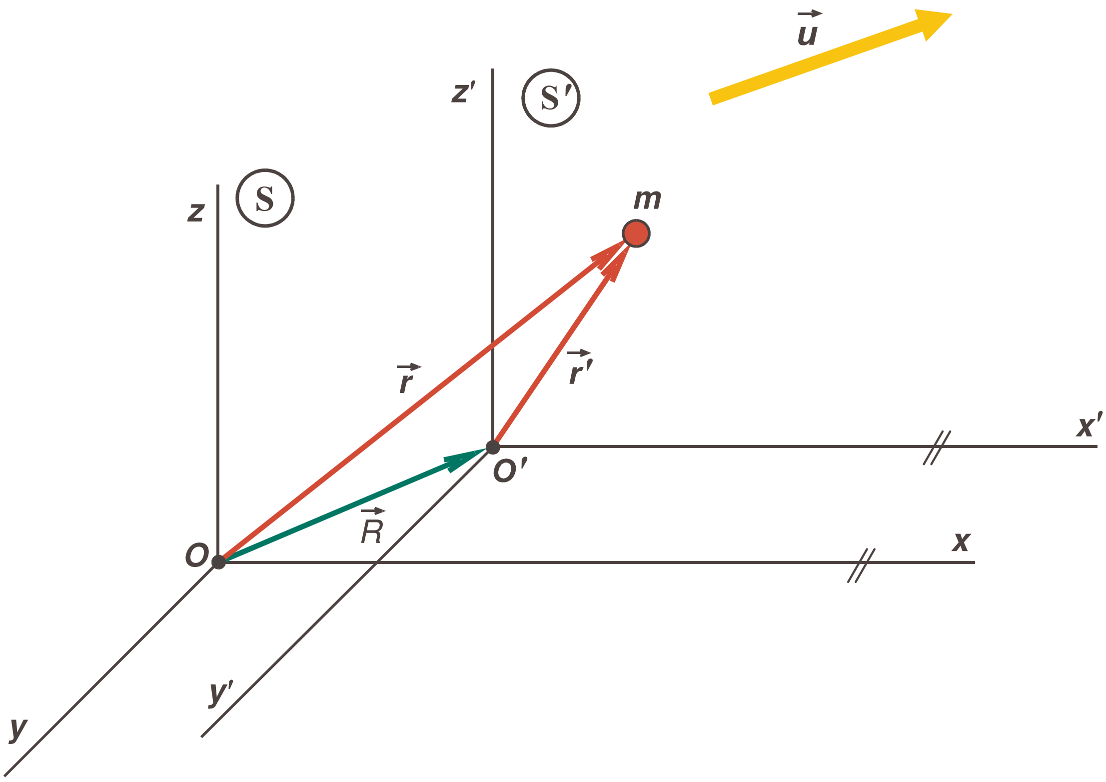
Základní postuláty a Lorentzovy transformace

Do základů své ***speciální teorie relativity*** (1905) položil Albert Einstein **pouze dva** jednoduché principy (postuláty) :

1) **Všechny fyzikální zákony mají ve všech inerciálních soustavách stejný tvar** (musí být invariantní)

2) **Rychlost světla ve vakuu je ve všech inerciálních soustavách konstantní** (bez ohledu na rychlost zdroje a pozorovatele)

Je zřejmé, že v klasické fyzice základní „elektromagnetické“ zákony - **Maxwellovy rovnice** - při přechodu z jedné **inerciální** soustavy do druhé **změní svůj tvar** (vždyť jen například ze stacionárních nábojů v jedné souřadné soustavě se v druhé soustavě stanou proudy).
Matematicky pak takový přechod mezi dvěma inerciálními soustavami popisují **Galileovy transformace**.
Je proto jasné, že **porušení prvního Einsteinova principu** způsobují právě tyto transformační vztahy.



Připomeňme si jejich tvar. V klasické mechanice jsme je odvodili za předpokladu, že se jedna inerciální soustava S' pohybuje vůči druhé inerciální soustavě S posuvným (translačním) pohybem konstantní unášivou rychlostí $\vec{u}$ (a že v počátečním nulovém čase obě soustavy splývají) :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - u_x \cdot t \\ y' &= y - u_y \cdot t \\ z' &= z - u_z \cdot t \\ t' &= t \end{aligned}}$$

Galileovy transformace

Jednoduchou derivací průvodičů jsme také nalezli vztah mezi rychlostmi v obou inerciálních soustavách :

$$\boxed{\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}}$$

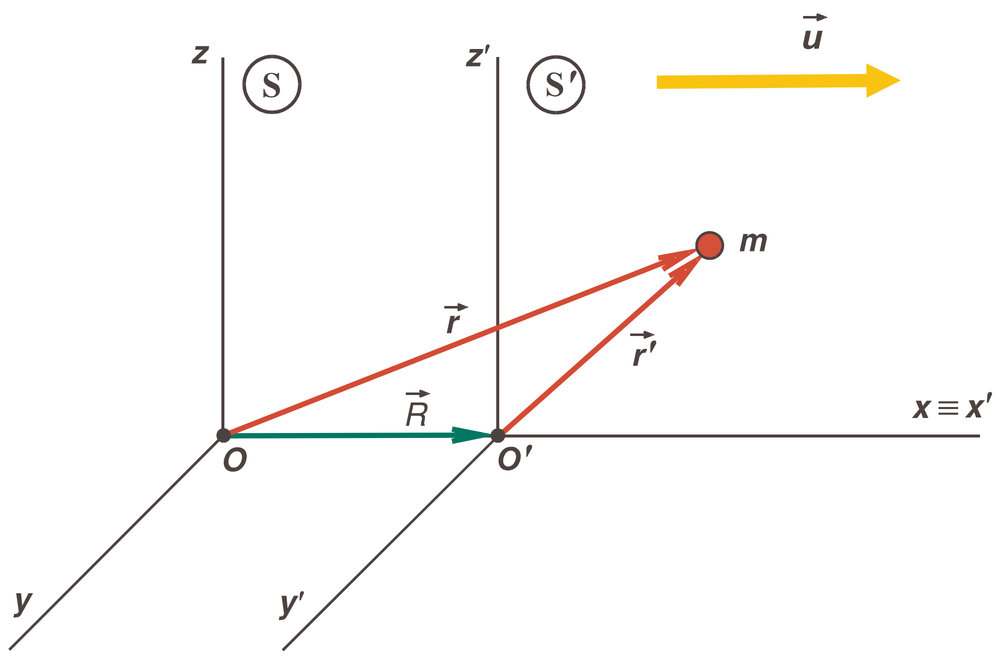
skládání rychlostí (v klasické mechanice)

Je zřejmé, že při platnosti této rovnice je **porušen i druhý Einsteinův princip** . Kdyby se totiž pohyboval světelný paprsek v soustavě S podél osy x rychlostí c , pak by v soustavě S' byla jeho rychlost jiná než rychlost světla :

$$c' = c - u \neq c$$

Tedy : **Pro splnění postulátů speciální teorie relativity budou muset přechod mezi inerciálními soustavami popisovat jiné transformační vztahy.**

Pokusíme se je nyní odvodit přímým použitím obou Einsteinových postulátů pro nejjednodušší situaci dvou inerciálních soustav - kdy unášivá rychlost je rovnoběžná se společnými x-ovými osami a zbývající osy jsou rovnoběžné (viz obr.) :



Potom budou mít klasické Galileovy transformace tvar :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - u \cdot t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}}$$

Galileovy transformace (zjednodušené)

Tyto rovnice vlastně představují matematicky nejjednodušší **vztah linearity** mezi proměnnými veličinami prostorových souřadnic a času, který zaručuje **jednoznačné přiřazení** míst a časů - tzv. ***událostí*** - v obou soustavách.

Předpokládejme, že nový vztah pro x-ové souřadnice také bude vyjadřovat lineární vztah mezi nimi, ale s jiným koeficientem :

$$\boxed{x' = k \cdot (x - u \cdot t)}$$

Transformační vztah je také **fyzikálním zákonem** , proto **podle prvního Einsteinova principu** musí mít obrácený transformační vztah (pro druhou soustavu) **stejný tvar** se stejným koeficientem (pouze s opačným znaménkem unášivé rychlosti, neboť tato rychlost je z hlediska druhé soustavy, tj. S vůči S' – také opačná) :

$$\boxed{x = k \cdot (x' + u \cdot t')}$$

Pro změnu rovností u souřadnic ostatních dvou os , kolmých na směr unášivé rychlosti, nebyl nalezen žádný fyzikální důvod, proto bude stále platit :

$$y' = y$$
$$z' = z$$

Časové souřadnice však rozhodně stejné nebudou . Jestliže totiž dosadíme za čárkované x z první rovnice, dostaneme :

$$x = k(k(x - u \cdot t) + u \cdot t') = k^2 (x - u \cdot t) + k \cdot u \cdot t' = k^2 x - k^2 u \cdot t + k \cdot u \cdot t'$$

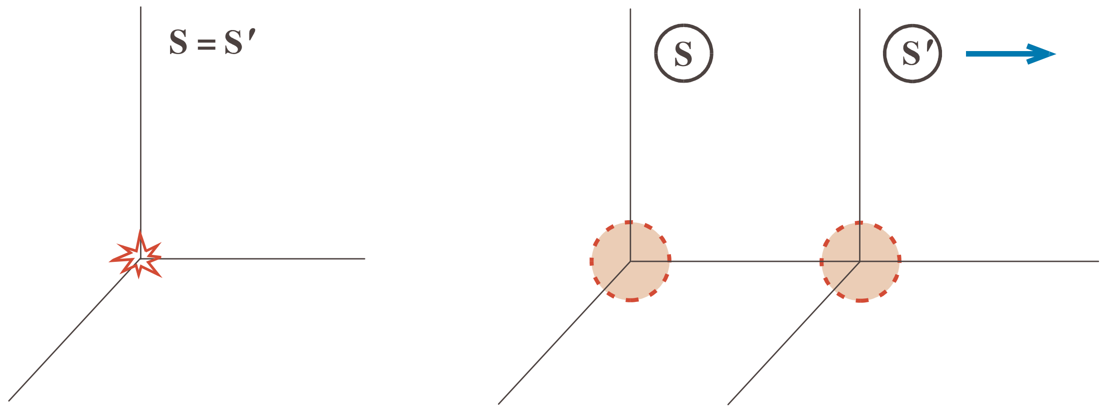
Vzniklá rovnice umožňuje vytvořit zjevně netriviální převodní vztah mezi časy v obou soustavách :

$$\boxed{t' = k \cdot t + \left(\frac{1 - k^2}{k \cdot u} \right) \cdot x}$$

V následujícím kroku použijeme **druhý Einsteinův postulát** o neměnné rychlosti světla. Využijeme také již dříve uvedený předpoklad, že obě soustavy jsou totožné na počátku odečtů obou časů , tj. pro :

$t = t' = 0$

Nechť v tomto čase nula v místě jejich společných počátků zableskne výbojka a v obou soustavách je pak **měřena rychlost světla** , které se podle druhého principu musí šířit vždy stejnou rychlostí - a stejnou ve všech směrech - proto v každé soustavě bude pozorována stejná "**světelná koule**" - tj. kulová vlnoplocha elektromagnetického vlnění (viz. obr.).



Když tedy bude v soustavě S změřen v nějakém čase **poloměr** této kulové vlnoplochy - což je vlastně **dráha světla** za tento čas na libovolném paprsku, vycházejícím z počátku, například i na ose x – pak musí platit :

$$\boxed{x = c \cdot t}$$

Protože v soustavě S' je rychlost světla stejná , musí pro čárkované souřadnice platit analogicky :

$$\boxed{x' = c \cdot t'}$$

Do této rovnice dosadíme z předchozích vztahů :

$$k(x - u \cdot t) = c \cdot (k \cdot t + (\frac{1-k^2}{k \cdot u}) \cdot x)$$

Upravíme pro výpočet x-ové souřadnice :

$$x \cdot (k - \frac{1-k^2}{k \cdot u} \cdot c) = c \cdot k \cdot t + u \cdot k \cdot t$$

A dostaneme :

$$\boxed{x = \frac{c\cdot k\cdot t \ + \ u\cdot k\cdot t}{(\,k - \frac{1-k^2}{k\cdot u}\cdot c\,)} = c\cdot t\cdot\frac{k \ + \ \frac{u\cdot k}{c}}{(\,k - \frac{1-k^2}{k\cdot u}\cdot c\,)}}$$

Porovnání získané rovnice se vztahem pro poloměr světelné koule v soustavě S nám dá podmínku pro velikost zlomku :

$$\frac{k+\frac{u\cdot k}{c}}{(\,k-\frac{1-k^2}{k\cdot u}\cdot c\,)} = 1$$

Z ní pak postupně dostáváme :

$$k + \frac{u\cdot k}{c} = k - \frac{1-k^2}{k\cdot u}\cdot c \qquad /-k$$

$$\frac{u\cdot k}{c} = -\frac{1-k^2}{k\cdot u}\cdot c \qquad /\cdot kuc$$

$$k^2u^2 = -(\,1-k^2\,)\cdot c^2 = k^2\cdot c^2 - c^2$$

A vypočítáme neznámý koeficient :

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2-u^2} = \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

Po odmocnění :

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1-u^2/c^2}}}$$

Po dosazení tohoto výsledku do předchozích rovnic pro x' a t' dostaneme transformační vztahy mezi inerciálními soustavami ve speciální teorii relativity :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x \ - \ u\cdot t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t \ - \ u\cdot x/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned}}$$

Lorentzovy transformace

Jak jsme již uvážili, transformační vztahy pro obrácený převod souřadnic musí být formálně úplně stejné, liší se pouze znaménkem unášivé rychlosti :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{x' + u\cdot t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + u\cdot x'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \end{aligned}}$$

Lorentzovy transformace inverzní

Tyto transformační vztahy byly prvně objeveny Kramerem (v poněkud odlišném tvaru) v 80. letech 19. století při rozboru vlnové rovnice, pak je odvodil Holland (1900), když zkoumal podmínky invariance Maxwellových rovnic v inerciálních systémech a intenzivně je používal Lorentz při rozvíjení své elektronové teorie elektromagnetických jevů v pohybujících se tělesech (1904) a také Poincare (1906).

Lorentz (Hendrik Antoon) však z těchto transformačních vztahů nevyvodil žádné zásadní závěry, snažil se je vysvětlit **v rámci klasické fyziky** . Za jedinou správnou inerciální soustavu , s jedině správnými souřadnicemi, považoval stále klidový **absolutní prostor** , ve kterém platí základní tvar Maxwellových rovnic. V ostatních inerciálních soustavách, které se pohybují vůči absolutnímu prostoru, jsou pak **souřadnice nesprávné** , zkreslené zkracováním měřítek a zpomalováním hodin (které matematicky plynou z transformačních vztahů).

Zásadní krok vpřed udělal až **Albert Einstein** , když zavrhnul výlučnost absolutního prostoru a času a pokládal všechny **inerciální soustavy za rovnocenné** pro (nejen) elektromagnetické zákony a **souřadnice** v těchto soustavách považoval za objektivní a **správné** .
Vzájemná souvislost prostorových a časových souřadnic a jejich závislost na pohybovém stavu souřadného systému - pak pro Einsteina znamenala **zcela nové pojetí prostoru a času** , které samozřejmě ovlivnilo zásadním způsobem fyzikální obraz celého našeho světa.

Dříve než se budeme obdivovat úžasným relativistickým efektům, seznámíme se s základními používanými **pojmy** teorie relativity a všimneme si několika přímých **důsledků** Lorentzových transformací :
Soustava souřadnic je samozřejmě především matematický pojem , který jsme poznali nejprve v analytické geometrii jako (takřka) nehmotný systém narýsovaných přímek a měřítek.
Všechny fyzikální veličiny počínaje délkou, časem, atd. jsou však veličinami **měřitelnými** , tj. musíme o nich vždy uvažovat v souvislosti s **realizací jejich změření** .

Fyzikální soustava souřadnic je tedy zřejmě nějaká mechanická soustava **měřicích tyčí** jistě nezanedbatelné hmotnosti , protože bude asi obsahovat mnoho dalších konstrukčních prvků jako různé vzpěry a příčky, které musí zajistit, aby se měřicí tyče neprohýbaly a aby svíraly předepsané úhly.
Dále musí souřadnicová soustava obsahovat přesné ***hodiny*** pro měření času, jak dále uvidíme, ne pouze jedny. Nesmíme zapomenout na zajištění pracovních a životních podmínek pro přítomnost nějakého aktivního činitele (optimálně asi člověka), který provádí vlastní měření – tzv. ***pozorovatel*** .
Fyzikálně tedy musíme soustavu souřadnic chápat jako (dosti) **hmotné těleso** , většinou tvořící nedílný celek s nějakým jiným tělesem, které chceme sledovat (představte si její realizaci na Zemi, ve vlaku, v letadle, na oblíbené raketě …).

V souřadné soustavě (nepřiklad S) změřené **prostorové souřadnice** x, y, z a **čas** t pak vypovídají o tom, že na určitém místě a v určitém čase se něco stalo - je to tzv. ***událost*** v soustavě S **.** Všechny čtyři souřadnice jsou principiálně stejně důležité, proto se většinou formálně matematicky spojují do čtyřrozměrného ***časoprostoru*** (x, y, z, t).

Uvažme ještě jednu okolnost při stanovení (změření) nějaké události v soustavě S : Jak prostorové souřadnice, tak i čas musejí být opravdu změřeny v této soustavě , tj. pozorovatel musí odečíst souřadnice na jejích měřicích tyčích a také čas na hodinách soustavy.
Co to je ale za hodiny ? Můžeme si například představit, že si pozorovatel přinese s sebou na místo sledované události svoje hodinky a tam na nich odečte čas, jak vlastně všichni běžně v životě děláme ?

V teorii relativity to ale nelze udělat !
Podle poslední rovnice Lorentzových transformací totiž časový údaj závisí na unášivé rychlosti soustavy. Kdyby tedy pozorovatel **přenášel** své hodiny nenulovou rychlostí po soustavě S , už by to **nebyly** hodiny této soustavy - patřily by do soustavy jiné.
Vlastní hodiny každé souřadné soustavy (tedy i každého tělesa), které mají měřit její ***vlastní čas*** , musí být proto **stále v klidu** vůči této soustavě - musí být **stále na stejném místě** této soustavy.

V teorii relativity často sledujeme několik událostí v různých místech zvolené soustavy a přitom určujeme jejich časy – tedy podle předchozích úvah v místě každé události potřebujeme mít předem připravené vlastní hodiny.
V každé soustavě souřadnic musí tedy existovat ne jedny hodiny, ale celý **soubor vlastních hodin** , **vhodně rozmístěných** v místech očekávaných událostí, **stejně rychle jdoucích** a samozřejmě vzájemně ***synchronizovaných*** .

Příprava takového souboru se předpokládá dvěma možnými způsoby :

a) Všechny vhodné hodiny (jdoucí stejně rychle) můžeme shromáždit na jednom místě soustavy, synchronizovat je (seřídit na stejný údaj) a nekonečně pomalu je posunout na potřebná místa. To je jistě teoreticky vynikající, ale pro skutečnou realizaci bychom určitě použili druhý způsob :

b) Nebo vhodné hodiny napřed rozmístíme na potřebná místa a potom je synchronizujeme s nějakými klidovými hodinami soustavy (aspoň jedny jistě v soustavě musejí být) - s využitím konstantní rychlosti světla (tj. elektromagnetického signálu) a změřené délky jeho dráhy.

Všimněme si dále, že z Lorentzových transformací přímo plyne (aby měl zlomek smysl) zásadní podmínka pro unášivou rychlost souřadné soustavy:

$$\boxed{u \le c}$$

Každá soustava je ale hmotné těleso a naopak každé těleso může být souřadnou soustavou, proto tuto nerovnost považujeme za základní podmínku na rychlost tělesa ve speciální teorii relativity :

rychlost světla ve vakuu je mezní rychlostí pohybu hmotných těles

Ze tvaru Lorentzových transformací je také ihned vidět jejich vynikající vlastnost - že pro **nízké rychlosti** (ve srovnání s rychlostí světla) přecházejí na klasické Galileovy transformace :

$$x' = \frac{x - u \cdot t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \xrightarrow[u \ll c]{} x - u \cdot t$$

$$t' = \frac{t - u \cdot x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \xrightarrow[u \ll c]{} t$$

Pro takové nízké rychlosti tedy v běžném životě a v běžných technických aplikacích můžeme dále používat klasickou Newtonovu mechaniku, jejíhož příjemného souladu s našimi intuitivními představami o okolním světě si pak už jistě budeme velmi vážit.

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 03/2006**

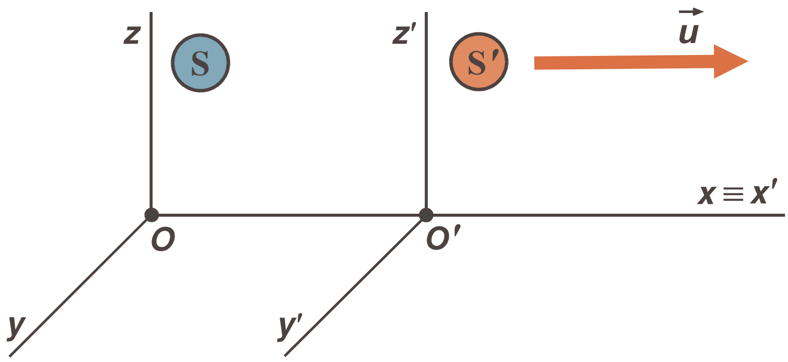
rev. 03/2007

Časoprostorové „paradoxy“

Lorentzovy transformace , nové převodní vztahy mezi souřadnicemi inerciálních systémů, včetně času, přinášejí s sebou také **nové „časoprostorové“ vztahy** , které **odporují** dosavadní lidské zkušenosti s „makrosvětem“ kolem nás – a v tomto smyslu tak opravňují použití pojmu **paradoxy** .

Tyto časoprostorové vztahy však pravdivě a **objektivně popisují prostor a čas** „za hranicemi“ našeho lidského světa, nemají tedy nic společného s fikcí, zdáním, nebo omyly … , jsou pouze projevem dříve neznámého „relativního“ charakteru prostorových a časových vlastností materiálních objektů.

Všechny diskutované časoprostorové jevy jsou popisovány ve **zjednodušeném uspořádání** dvou inerciálních soustav, definovaném v minulé kapitole - kdy obě soustavy v nulovém čase splývají a unášivá rychlost soustavy S' je rovnoběžná se společnými x-ovými osami (viz obr.) :



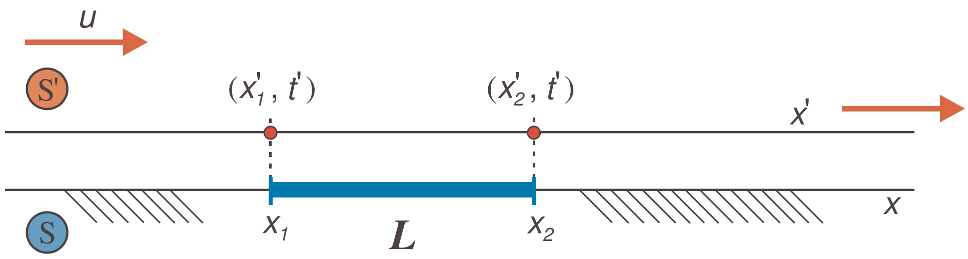
1) Kontrakce (zkrácení) délek

Představme si nějaké těleso - například tyč, které je v **klidu** v inerciální soustavě souřadnic S . Jev kontrakce se bude týkat pouze x-ových souřadnic, proto je na obrázku z celé soustavy znázorněna pouze tato osa a tyč je na ní nakreslena jako **nehybná úsečka** délky L .

Souřadnice koncových bodů x_1 a x_2 jsou jistě konstanty nezávislé na čase , kdy jsou změřeny pozorovatelem v soustavě S , a pro délku tyče zřejmě platí :

$$\boxed{L = \Delta x = x_2 - x_1}$$ ***délka tyče v S – klidová (vlastní) délka***

Nyní určíme délku tyče ve druhé inerciální soustavě S', která se jako obvykle pohybuje unášivou rychlostí u . Osa x' této soustavy je podle předchozího obrázku geometricky totožná s osou x , je však zakreslena opticky <u>odděleně</u> , abychom si dobře uvědomili její pohyb uvedenou rychlostí vzhledem k ose x (viz obr.).



Pro stanovení délky v soustavě S' je opět nutno změřit souřadnice koncových bodů tyče na čárkované ose , tj. x_1' a x_2' a pro délku tyče **<u>musí</u>** (podle 1. postulátu) opět platit **<u>stejný vztah</u>** :

$$\boxed{L' = \Delta x' = x_2' - x_1'}$$ ***<u>délka tyče v S'</u>***

Protože se ale osa x' vůči tyči <u>pohybuje</u> , tyto souřadnice se s časem <u>neustále mění</u> – a proto je nutné, aby byly změřeny **<u>současně</u>** - tedy v jednom **<u>stejném okamžiku</u>** (čase) t' .

Pro výpočet souřadnic koncových bodů pak s výhodou využijeme <u>inverzní</u> Lorentzovy transformace, které obsahují čárkovaný čas (nyní tedy stejný) :

$$x_1 = \frac{x_1' + u \cdot t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$x_2 = \frac{x_2' + u \cdot t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

A dosadíme do prvního vztahu, pro délku tyče v soustavě S :

$$L = x_2 - x_1 = \frac{x_2' + u \cdot t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{x_1' + u \cdot t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{L'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Výraz pod odmocninou je vždy menší než jedna, Proto je změřená <u>délka tyče v soustavě S'</u> , pohybující se vůči tyči, vždy **<u>menší</u>** než klidová (vlastni) délka :

$$\boxed{L' = L \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2} < L}$$ ***<u>kontrakce délky</u>***

Ve shodě s Einsteinem považujeme výsledek měření za **<u>existující objektivní vlastnost</u>** tělesa (tyče), tedy konstatování **<u>„délka tyče je naměřena 45 cm“</u>** je **<u>ekvivalentní</u>** větě **<u>„délka tyče je 45 cm“</u>** .

Jestliže si uvědomíme **relativnost klidu a pohybu** (tedy, že také tyč - soustava S - se pohybuje vůči soustavě S') a představíme si sebe jako **pozorovatele v S'**, můžeme konstatovat obecnějším způsobem, bez konkrétního označování soustav :

Délka pohybujícího se tělesa je (naměříme ji) **vždy menší než jeho délka klidová - tj. změřená v klidové soustavě tělesa.**

Dále uvažujme o rozměrech tělesa na osách kolmých na směr pohybu. Představíme si proto naši tyč položenou na osách y a z a aplikujeme Lorentzovy transformace :

$$\Delta y = y_2 - y_1 = y_2' - y_1' = \Delta y'$$
$$\Delta z = z_2 - z_1 = z_2' - z_1' = \Delta z'$$

Vidíme, že na těchto osách ke změnám délek nedochází. Můžeme tedy ještě doplnit předchozí konstatování :

Kontrakce délek nastává jen ve směru pohybu těles.

Poznamenejme na závěr, že v našich úvahách bychom mohli také používat pojem **událost** , definovaný v kapitole „Základní postuláty” :

Měření souřadnic koncových bodů tyče na ose x' by tedy v tomto smyslu byly dvě ***současné události*** na **dvou různých místech** této osy - o časoprostorových souřadnicích (x_1', t') a (x_2', t') - které by zřejmě vyžadovaly použití dvou vlastních hodin soustavy S' (a také dvou pozorovatelů).

Takové dosti “těžkopádné” měření by asi mohlo být za určitých podmínek nahrazeno například fotografováním tělesa, které by jistě zvládl jeden pozorovatel s jedněmi hodinami

Pozn. : Fotoaparát by asi musel být umístěn přesně na kolmé centrální ose tyče, aby vzdálenosti ke koncovým bodům byly stejné - tj. aby byla i stejná doba chodu světelných paprsků do objektivu).

Proces fotografování pak přibližně souhlasí s obyčejným pozorováním lidským okem, tzn. pohybující se těleso bychom **“viděli zkrácené“** ve směru jeho pohybu.

Nelaskavý čtenář na tomto místě asi projeví zklamání z teorie relativity, vždyť klasická fyzika přináší často výraznější prostorové efekty (viz *“tyč do vody ponořená zdá se býti zalomená”* , apod.), pokračujte ale prosím ve čtení, situace se značně vylepší

2) Dilatace (prodloužení) času

Představme si nyní, že na nějakém obecném místě (x, y, z) soustavy S proběhne určitý **děj** (proces), který má ***dobu trvání*** Δt . Jestliže označíme jako t_1 čas příslušný **začátku** tohoto děje a t_2 čas jeho **konce** , pak si můžeme uvědomit, že jsme vlastně definovali **dvě události** v časoprostoru, které se staly na tomto jednom místě - tzv. ***soumístné události*** v soustavě S (předpokládejme, že tyto události se staly na x-ových osách - potom ostatní dvě souřadnice jsou nulové v obou soustavách – nebudeme je nezapisovat) :

(x, t_1) …… začátek děje – **první událost v soustavě** S

(x, t_2) …… konec děje – **druhá událost v soustavě** S

Časy těchto událostí jsou tedy změřeny na jednom místě soustavy S , tj. na jedněch nehybných hodinách H v tomto místě. Tím je zaručeno, že se jedná skutečně o vlastní čas soustavy S . Pro **dobu trvání** děje, jinak řečeno pro **časový interval** mezi těmito událostmi, můžeme napsat :

$$\boxed{\Delta t = t_2 - t_1}$$ ***klidová doba trvání - časový interval v soustavě S***

Nyní se pokusíme určit, jaký časový interval mezi těmito událostmi naměří pozorovatel ve druhé pohybující se soustavě S' . Když označíme časy těchto událostí t_1' a t_2' , bude analogicky :

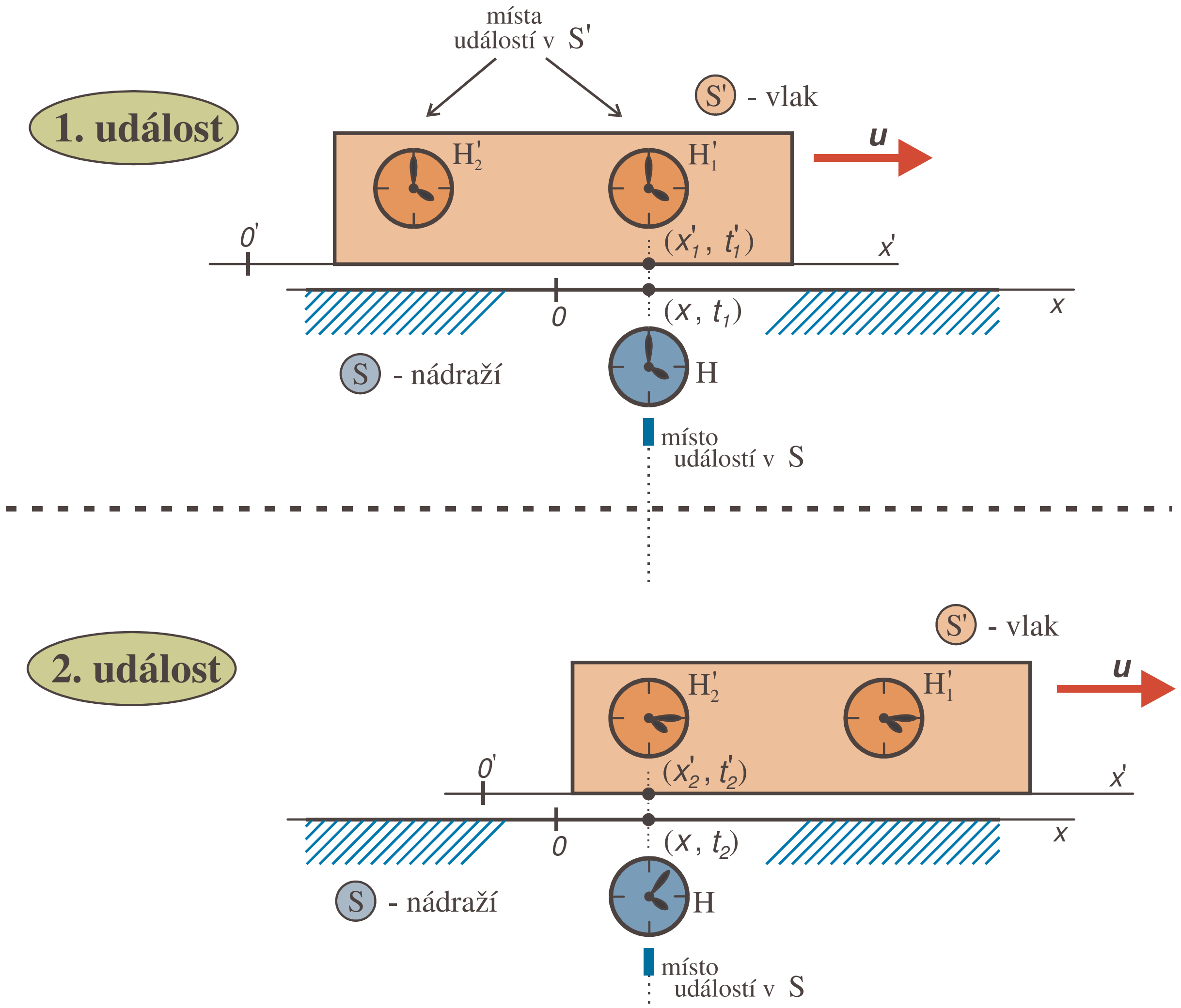
$$\boxed{\Delta t' = t_2' - t_1'}$$ ***doba trvání - časový interval v soustavě S'***

Na obrázku jsou z obou soustav zakresleny opět pouze oddělené x-ové osy. Pro názornost si můžeme představit soustavu S například jako nádraží a soustavu S' jako projíždějící vlak. Dvě soumístné událostmi na nádraží (v S) jsou pak například rozsvícení zeleného světla na semaforu a následné rozsvícení červeného světla na stejném semaforu (viz obr.) .

Protože se osa x' (vlak) pohybuje, jsou místa těchto událostí v S' obecně různá, tj. x_1' a x_2' (například rozsvícení zeleného světla na semaforu se stane na úrovni počátku vlaku a když se rozsvítí světlo červené, je semafor na úrovni konce vlaku) - **v soustavě S' tedy vznikly dvě nesoumístné události** :

(x_1', t_1') …… **první událost v soustavě** S'

(x_2', t_2') …… **druhá událost v soustavě** S'



Stanovení času každé událostí ovšem vždy vyžaduje nehybné hodiny na místě této událostí. V soustavě S' tedy potřebujeme **dvoje synchronizované hodiny** (H_1' na místě x_1' a H_2' na místě x_2') , zatímco v soustavě S stačí pouze jedny hodiny (H na místě x) (viz obr.) .

Pro časové souřadnice použijeme dále Lorentzovy transformace, nyní se bude hodit jejich základní tvar, který dosadíme do vztahu pro čárkovaný časový interval :

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - u\cdot x/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{t_1 - u\cdot x/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Výraz pod odmocninou je vždy menší než jedna, proto **dobu trvání** nějakého děje - tj. **časový interval** mezi dvěma soumístnými událostmi, naměříme **v pohybující se** soustavě S' vždy **větší** než v klidové soustavě S :

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} > \Delta t}$$

dilatace času

Jestliže si opět - jako u kontrakce délek - uvědomíme **relativnost klidu a pohybu** a představíme-li si sebe jako pozorovatele ve vlaku, pak můžeme oprávněně konstatovat, že nádraží se pohybuje unášivou rychlostí vůči nám (vlaku), a dilataci času lze tedy také popsat obecněji, bez konkrétního označování soustav :

> **Dobu trvání nějakého děje probíhajícího na pohybujícím se tělese** (tj. časový interval mezi dvěma soumístnými událostmi na tomto tělese) **naměříme vždy větší než v klidové soustavě tělesa.**

V učebnicích se velmi často doba trvání děje aplikuje na chod vlastních hodin soustavy - předpokládá se, že časový interval Δt odpovídá jednomu „tiknutí“ hodin (tj. např. době kmitu mechanického kyvadla, či periodě elektrických kmitů) – pak **prodloužení** tohoto intervalu znamená vlastně **zpomalení** chodu hodin. Tedy :

> **Hodiny v pohybující se soustavě jdou** (tikají) **z hlediska klidové soustavy pomaleji.**

Jev dilatace času je dnes možno považovat za **spolehlivě ověřený** na mnoha experimentech, například :

a) Záření pohybujících se atomů

Jestliže atomům (molekulám, iontům) dodáváme zvnějšku energii (zahřátím, nárazy jiných částic, zářením) začnou tyto atomy samy **vyzařovat elektromagnetické vlnění** , které má přesné a stálé frekvence, dané pouze energetickými hladinami elektronového obalu atomu. **Periody** tohoto vlnění pak dokonale odpovídají definici **vlastní doby trvání** (je to časový interval mezi opakujícími se hodnotami – například mezi maximálními hodnotami elektrické intenzity ve vlnění).
Zářící atomy, jako relativně lehké částice, lze snadno uvést do pohybu (například také pouhým zahřátím) a **klidový laboratorní detektor** pak musí podle vztahu pro dilataci času přijímat vlnění, které bude mít **zvětšenou periodu** , tj. také **větší vlnovou délku** (viz známý vztah $\lambda = c \cdot f = c / T$).
Vlnová délka bude proto ve spektru posunutá k vyšším hodnotám, pro oblast viditelného světla je to směrem k červené barvě – tak vzniká tzv. “***rudý posuv***” spektrálních čar .
Prokazatelné měření bylo vykonáno již v roce 1938.

b) Doba života pohybujících se mikročástic

Mediálně známý je případ částic zvaných **mezony** μ , které se dají dobře připravit v laboratořích jako téměř klidové částice s **dobou života** $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ sec. Vznikají ale také působením kosmického záření v horních vrstvách atmosféry (více než 10 km nad zemí) jako superrychlé částice (*0,9994.c*) a jsou potom bez problémů detekovány na povrchu Země.

Bez existence teorie relativity by tak ale vznikla **velká záhada** , neboť i kdyby se μ -mezony pohybovaly přímo rychlostí světla, za dobu svého života by mohly urazit **maximálně** dráhu :

$$s = c \cdot t = 3 \cdot 10^{8} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6} = 660\ m$$

a neměly by tedy žádnou šanci dorazit až k 10 kilometrů vzdálenému pozemskému detektoru.

Jejich doba života je však podle výše uvedeného výkladu jejich **vlastní časový interval** , protože je změřená v jejich **klidové** souřadné soustavě, která se nyní ale spolu s nimi **pohybuje vůči Zemi** vysokou rychlostí 0,9994 c .

Doba života mezonů v pozemské soustavě se proto podle vztahu pro dilataci času výrazně **zvětší** (asi třicetinásobně) na hodnotu :

$$\Delta t' = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - (0{,}9994)^2}} = 63{,}5 \cdot 10^{-6}\ sec.$$

která je již více než dostatečná pro překonání uvedené vzdálenosti k povrchu Země.

c) Přímé měření času na pohybujících se tělesech

Ohromující přesnost tzv. atomových hodin (10^{-13} sec.) umožnila už v roce 1977 přímé ověření dilatace času. Přitom se údaj **stacionárních hodin** na Zemi **porovnal** s údajem **hodin v letadle** , které obletělo zeměkouli (bylo to běžné dopravní letadlo). Při jeho rychlosti zdaleka nedosahující 1000 km/hod. stačil dokonce i let podstatně kratší, aby mohlo být spolehlivě konstatováno, že hodiny v letadle se **zpožďují** – tedy jdou **pomaleji** oproti pozemským hodinám o několik desítek nanosekund (10^{-9} sec.).

Vzorec pro dilataci času je proto dnes tímto způsobem ověřen s přesností řádu desetin procenta (bylo ovšem nutno odseparovat časovou diferenci podle obecné teorie relativity)

Zdá se, že takové přímé měření potvrzuje představy zejména autorů sci-fi o kosmickém cestování, kdy totiž kosmonaut po návratu zjistí, že jeho současníci zestárli na Zemi mnohem více nežli on, případně že již ani nežijí.

Laskavý čtenář se ovšem na tomto místě jistě dostane do rozpaků - vždyť přece platí **relativnost klidu a pohybu** - kosmonaut tak může bez rozpaků tvrdit, že ne on, ale Země od jeho rakety “odlétla” a pak se vrátila a tak že tedy on musí být starší než “přilétnuvší” pozemšťané – tak vzniká tzv. ***paradox dvojčat*** .

Řešení tohoto problému není zcela jednoduché …

Je zřejmé, že hrátky s časem, které v klasické fyzice nemají obdoby, jsou daleko efektnější než změny délek. A to ještě zdaleka není všechno - v dalším výkladu objevíme problém nesrovnatelně důležitější než spor o to, kdo bude stařešinou :

3) Relativnost současnosti

V prvním odstavci o kontrakci délek jsme již poznali dvě současné události, které nastaly na různých místech, tj. ***současné nesoumístné události*** . Časoprostorové souřadnice takových událostí můžeme v soustavě S zapsat (předpokládáme opět události na x-ových osách, nepíšeme tedy ostatní nulové souřadnice) :

(x_1, t_1) ……… **událost č. 1 v soustavě** S

(x_2, t_2) ……… **událost č. 2 v soustavě** S

A **současnost** těchto událostí lze potom charakterizovat **rovností jejich časů** , jinak také **nulovým časovým intervalem** :

$$\boxed{t_1 = t_2} \qquad \boxed{\Delta t = t_2 - t_1 = 0}$$

Nyní si položíme otázku, **jaké jsou tyto události** ve druhé soustavě S' , zda jsou také **současné** ? Napíšeme nejprve obecně jejich souřadnice :

(x_1', t_1') ……… **událost č. 1 v soustavě** S'

(x_2', t_2') ……… **událost č. 2 v soustavě** S'

A prozkoumáme současnost událostí tak, že s využitím Lorentzových transformací vypočítáme jejich **časový interval** :

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - u \cdot x_2 / c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{t_1 - u \cdot x_1 / c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{t_2 - t_1 - u / c^2 (x_2 - x_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{-u / c^2 (x_2 - x_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Protože pouze první část čitatele výsledného zlomku je nulová, dostáváme celkem obecně **nenulový** výraz :

$$\boxed{\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{-u / c^2 (x_2 - x_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \neq 0}$$

V soustavě S' již tedy události **nejsou současné** , jedna z nich nastane dříve než druhá. Která z nich to bude, záleží na místech událostí a. na volbě soustavy S' (směru její unášivé rychlosti) :

Například pro $x_2 - x_1 > 0$ a $u > 0$ dostaneme (viz vzorec) : $t_2' - t_1' < 0$

a tedy $t_2' < t_1'$, nebo-li jako ***první se stane událost č. 2***

A jistě pro $u < 0$ to bude opačně, nebo-li ***první bude událost č. 1***

V různých souřadných soustavách může tedy jako první nastat kterákoliv z původně současných událostí. Lze proto obecně konstatovat :

Současnost nesoumístných událostí je relativní, tj. existuje pouze v jedné souřadné soustavě - v jiných soustavách pak tyto události současné nejsou.

Z výsledného vztahu ovšem vidíme, že existuje také **možnost** , aby byl časový interval **vždy nulový** - tj. aby události byly **vždy současné** - tak tomu bude jedině za platnosti podmínky :

$x_1 \;=\; x_2$,

nebo-li že obě události se stanou na **jednom místě** , tedy :

Pouze současnost soumístných událostí je absolutní - tj. tyto události jsou současné v každé souřadné soustavě.

Ten nejhorší problém už vlastně naznačují předchozí rovnice, zaslouží si však být uveden zcela samostatně :

4) Obrácení časového sledu událostí

Prozkoumejme nakonec dvě **nesoučasné nesoumístné události** v soustavě S . Jejich časoprostorové souřadnice budou opět obecně :

$(x_1,\; t_1)$ .... událost č. 1 v soustavě S

$(x_2,\; t_2)$ .... událost č. 2 v soustavě S

A **nesoučasnost** událostí lze potom charakterizovat **nerovností jejich časů** , jinak také **nenulovým časovým intervalem** :

$$\boxed{t_1 \;\neq\; t_2} \qquad\qquad \boxed{\Delta\, t \;=\; t_2 \;-\; t_1 \;\neq\; 0}$$

Předpokládejme například, že **jako první nastane událost č. 1** , tj. že bude platit :

$\boxed{t_1 \;<\; t_2}$ tedy také $\boxed{\Delta\, t \;=\; t_2 - t_1 \;>\; 0}$

Pro časový interval v soustavě S' pak z Lorentzových transformací dostaneme :

$$\Delta\, t' \;=\; t_2' - t_1' \;=\; \frac{t_2 - u \cdot x_2 / c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \;-\; \frac{t_1 - u \cdot x_1 / c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \;=\; \frac{(t_2 - t_1) - u/c^2\,(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

První část čitatele výsledného zlomku již <u>není nulová</u> , ale podle předpokladu je to kladné číslo, druhý člen pak zřejmě může být kladný nebo záporný. Celý zlomek tedy může být **<u>jak kladný, tak i záporný</u>** (v závislosti na směru unášivé rychlosti soustavy S' a na místech událostí).

<u>Právě druhá možnost</u> je vysoce alarmující. Jestliže bychom totiž dostali záporný výsledek :

$\boxed{\Delta t' = t_2' - t_1' < 0}$ tedy také $\boxed{t_2' < t_1'}$

Pak to znamená, že existuje souřadná soustava, ve které **<u>nejprve nastane událost č. 2</u>** a teprve pak událost č. 1 – tedy že **<u>časový sled událostí</u>** je v této soustavě **<u>opačný</u>** .

Časový sled událostí obecně není absolutní - tj. existuje soustava souřadnic, ve které se události stanou v opačném pořadí.

Toto šokující zjištění je samozřejmě přímým důsledkem předchozí relativnosti současnosti a vyvolalo zejména mezi filozofy veliký rozruch.

Obecně je totiž možno rozlišit **<u>dvě kategorie</u>** událostí :

a) **<u>Události bez vzájemného vztahu</u>** .
b) **<u>Události s kauzálním (příčinným) vztahem</u>** - kdy první událost je <u>příčinou</u> a druhá událost je jejím <u>důsledkem</u>. Přitom doposud ještě nikdo nepopřel ***<u>princip kauzality</u>*** , který tvrdí, že vždy **<u>příčina předchází</u>** důsledku.

Celý **<u>vývoj světa</u>** , jeho historie, je vlastně neustálý, spojitý sled příčin a jejich následků. Pak se ovšem jako zcela absurdní jeví představa, že by v nějaké soustavě nejprve nastal důsledek a teprve potom by se udála jeho příčina …….

<u>Skutečně by tedy historie mohla jít někde pozpátku</u> ?

Prozkoumejme tento problém. Nejprve si položme otázku, zda je možno kauzalitu **<u>popsat matematicky</u>** ? Kupodivu je odpověď kladná :

<u>Nutným předpokladem</u> toho, aby události č.1 byla **<u>příčinnou</u>** a událost č.2 byla **<u>jejím důsledkem</u>** , je bezesporu to, aby <u>z místa</u> x_1 první události <u>do místa</u> x_2 události druhé dorazila nějaká **<u>informace</u>** o tom, co se v prvním místě stalo.

Teprve potom totiž může nastat ve druhém místě nějaká adekvátní reakce na první událost - například když v Sarajevu zastřelili Ferdinanda, tak teprve poté, až se to ve Vídni dozvěděli, mohl císař kvůli tomu vyhlásit válku.

Uvažme, že **nejrychlejší** možný přenos informace se realizuje elektromagnetickými vlnami **rychlostí světla** . Potom za předpokladu, že vzdálenost obou míst je x_2 - x_1 (předpokládejme > 0), bude **nejkratší** možná doba přenosu informace :

$$\boxed{\frac{x_2 - x_1}{c}}$$

A teprve **po uplynutí této doby** může nastat něco, co bude **souviset** s první událostí - co bude na ni nějak reagovat - jinak řečeno bude jejím **důsledkem**.

Časový rozdíl mezi kauzálními událostmi musí být tedy **větší než minimální doba přenosu informace** mezi místy těchto událostí :

$$\boxed{t_2 - t_1 > \frac{x_2 - x_1}{c}}$$

podmínka kauzality

Pravou stranu můžeme ještě zmenšit vynásobením číslem menším než jedna a nerovnost se nezmění :

$$t_2 - t_1 > \frac{x_2 - x_1}{c} \cdot \frac{u}{c}$$

A převedeme na levou stranu :

$$t_2 - t_1 - \frac{u}{c^2} \cdot (x_2 - x_1) > 0$$

Dostali jsme tak čitatel zlomku ze vztahu pro **časový interval** nesoumístných událostí v čárkované soustavě a protože jmenovatel je také kladný, bude tento časový intervalu také **vždy větší než nula** , tj. **první bude opět událost č. 1** :

$$\boxed{\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - u / c^2 (x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} > 0}$$

O vývoj světa si tedy v teorii relativity nemusíme dělat starosti, časová posloupnost kauzálně spojených událostí se nemůže nikdy obrátit.

Speciální teorie relativity není v rozporu s principem kauzality

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 03/2005**
rev. 03/2007

20.6.2007 - oprava nerovností na str. 9

Relativistická energie

V klasické mechanice jsme se podrobně seznámili s obecným pojmem (mechanická) **energie** - jako schopnosti tělesa vykonat mechanickou práci.

Tato schopnost byla jednoznačně spojena se **stavem tělesa** – buď s jeho polohou (**potenciální energie**), nebo s jeho pohybovým stavem, určeným velikostí rychlosti (**kinetická energie**).

Velikost energie pak byla stanovena jako velikost vykonané práce tělesem při jeho návratu do definovaného počátečního stavu - a byla také rovna původně vykonané práci (vnější silou) při změně stavu tělesa z počátečního na stav konečný (konečnou polohu, nebo rychlost).

Pro konzervativní silové pole jsme pak odvodili jeden z nejzákladnějších zákonů klasické fyziky (kromě Newtonových) – zákon ***zachování celkové mechanické energie*** .

Budeme jistě právem očekávat, že smysl tak zásadní fyzikální veličiny, jako je energie, se ve speciální teorii relativity nezmění.

Pokusme se proto nyní vypočítat **kinetickou energii tělesa** (hmotného bodu) hmotnosti m , jako práci (nějaké síly $\vec{F}$), která je (v dané inerciální souřadné soustavě) potřebná pro uvedení tělesa z **klidu** do **pohybu** rychlostí v .

Tato práce se samozřejmě koná na určité dráze mezi počáteční bodem $\vec{r}_1$ a koncovým bodem $\vec{r}_2$, víme však, že v případě kinetické energie velikost vykonané práce **nezávisí** ani na tvaru dráhy, ani na jejích krajních bodech , ale je **dána pouze počátečním a konečných pohybovým stavem** (počáteční rychlost je nulová , konečná rychlost má velikost v) :

$$E_{kin} = A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^v \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Dosaďme za sílu z relativistické pohybové rovnice a užijme dále definici rychlosti :

$$E_{kin} = \int_0^v \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^v \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_0^v d\vec{p} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_0^v d\vec{p} \cdot \vec{v}$$

Při předpokládané existenci kinetické energie nesmí tato práce záviset na tvaru dráhy, proto **zvolme** dráhu tak, aby umožnila co nejjednodušší výpočet (ale nebude to samozřejmě dokonalý důkaz) - takovou dráhu vytváří jistě **přímočarý** pohyb hmotného bodu, při kterém platí :

$$\boxed{d\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{v}}$$

Pak má skalární součin v integrálu jednoduchý tvar a můžeme také lehce stanovit velikost přírůstku hybnosti (diferencujeme součin $m \, . \, v$) :

$$d\vec{p} \cdot \vec{v} \;=\; dp \cdot v \;=\; d(\,mv\,) \cdot v \;=\; (\,dm \cdot v \;+\; m \cdot dv\,) \cdot v \;=\; dm \cdot v^2 + \; m \cdot v \cdot dv$$

Dostáváme tedy pro kinetickou energii :

$$E_{kin} = \int_0^v d\vec{p} \cdot \vec{v} = \int_0^v (\,dm \cdot v^2 + m \cdot v \cdot dv\,)$$

K úpravě druhého členu v integrálu použijeme vztah pro okamžitou hmotnost, který byl odvozen v předešlé kapitole „Relativistická dynamika" :

$$m \;=\; \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Tuto rovnici umocníme a převedeme na jednoduchý zlomek :

$$m^2 \;=\; \frac{m_o^2}{1 - v^2/c^2} \;=\; \frac{m_o^2 \cdot c^2}{c^2 - \; v^2}$$

Po vynásobení jmenovatelem a převedení na levou stranu dostaneme :

$$m^2 \cdot (\,c^2 - \; v^2\,) \;=\; m_o^2 \cdot c^2$$

Vzniklou rovnici nyní diferencujeme (nebo lze udělat derivaci podle času a potom vynásobit diferenciálem času), přitom použijeme znalosti o derivaci součinu dvou funkcí, složené funkce a o derivaci konstanty (pravá strana) :

$$2m \cdot dm \cdot (\,c^2 - v^2\,) \;+\; m^2 \cdot (\,-2v \cdot dv\,) \;=\; 0$$

Běžnou úpravou rovnice dále dostáváme :

$$m \cdot v \cdot dv \;=\; dm \cdot (\,c^2 - v^2\,)$$

A výsledek můžeme dosadit do vztahu pro kinetickou energii :

$$E_{kin} \;=\; \int_0^v (\,dm \cdot v^2 + m \cdot v \cdot dv\,) \;=\; \int_0^v \{\,dm \cdot v^2 + dm \cdot (\,c^2 - v^2\,)\} \;=\; \int_0^v dm \cdot c^2$$

Po vytknutí konstantní rychlosti světla pak vznikne velmi jednoduchý výraz :

$$E_{kin} \;=\; c^2 \cdot \int_0^v dm$$

V **klasické fyzice** by takový vztah – integrál přírůstků hmotnosti tělesa na nějaké dráze - byl velmi podivný - a byl by samozřejmě nulový , neboť hmotnost tělesa je v klasické fyzice konstantní veličinou.

V **teorii relativity** už ale známe **závislost hmotnosti** tělesa na rychlosti (jako rostoucí funkci této rychlosti) - je proto zřejmé, že meze integrálu určují počáteční **klidovou hmotnost** (při nulové rychlosti) a konečnou **okamžitou hmotnost** (při rychlosti v) :

$$E_{kin} = c^2 \cdot \int_0^v dm = c^2 \cdot [\, m \,]_0^v = m(v) \cdot c^2 - m(0) \cdot c^2$$

Zapsáno zjednodušeně :

$$\boxed{E_{kin} = m \cdot c^2 - m_o \cdot c^2}$$

kinetická energie

Z předchozí kapitoly také víme, že při rychlosti tělesa blížící se rychlosti světla roste jeho okamžitá hmotnost nade **všechny meze** :

$$\boxed{m = m(v) = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \xrightarrow[v \to c]{} \infty}$$

Dosadíme-li tuto hmotnost do posledního vztahu, bude nám ihned jasné, že **stejný závěr** můžeme vyslovit i pro práci vykonanou při urychlování tělesa, tedy pro jeho kinetickou energii :

$$\boxed{E_{kin} = m(v) \cdot c^2 - m_o \cdot c^2 = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot c^2 - m_o \cdot c^2 \xrightarrow[v \to c]{} \infty}$$

Obě tyto nekonečné limity vyjadřují zjevně nereálnou situaci, můžeme je proto považovat za rozumné ***fyzikální zdůvodnění mezní rychlosti těles*** (rovné rychlosti světla) ve speciální teorii relativity.

Dále promyslíme význam pravé strany získané rovnice pro kinetickou energii :

Jelikož to je vztah pro kinetickou energii - proto každý z obou členů na pravé straně musí mít také fyzikální rozměr a hlavně **fyzikální smysl nějaké energie**.

Konkrétně druhý člen na pravé straně obsahuje kromě konstanty pouze klidovou hmotnost, je tedy jednoznačně **spojený s klidovým stavem** tělesa v dané inerciální soustavě a vyjadřuje proto **veškerou** energii tělesa (hmotného bodu) v tomto stavu :

$$\boxed{E_o = m_o \cdot c^2}$$

klidová energie tělesa

Tato energie je jistě tvořena **potenciální energií** tělesa v případném vnějším silovém poli a musí obsahovat také veškerou **vnitřní energii** která je „skrytá“ v tělese, jako je i jenom „obyčejná“ mechanická energie všech částic tělesa (viz v termodynamice ***vnitřní energie*** plynu) - ale celou hodnotu klidové energie představuje až ta energie, která by se uvolnila až při dokonalé přeměně hmoty na energii – při tzv. **anihilaci** hmoty – podle ***zákona zachování hmoty a energie*** (viz dále).

Pozn. : Na částice v tělese také ovšem působí různé síly „nemechanické“ podstaty – jde zejména o síly, které těleso „drží pohromadě“ – tj. jsou to síly vytvářející **vázané stavy** částic tělesa. Potenciální energie těchto sil (v absolutní hodnotě) se označují jako **vazební energie** :

Existují tedy vazební energie všech částic ve **struktuře celého tělesa** (vazební ***energie krystalické mřížky***) a energie všech „subčástic“ ve **struktuře každé částice** hmoty - tj. vazební energie **atomů** v molekule (***chemická energie***), vazební energie **elektronů** v atomu (celková ***ionizační energie*** atomu) a vazební energie **nukleonů** v atomovém jádru (***jaderná energie***).

Nejvyšší hodnotou se vyznačuje posledně jmenovaná jaderná vazební energie – je v rozmezí 1,1 až 8,6 MeV na jeden nukleon jádra – přesto však ve srovnání s klidovou energií nukleonu (931 MeV) je zanedbatelně malá (přibližně od 1 ‰ do 1 %).

Význam prvního členu pravé strany poznáme až po jeho osamostatnění :

$$m(v)\cdot c^2 = m\cdot c^2 = E_{kin} + m_o\cdot c^2 = E_{kin} + E_o$$

Je to tedy celkový součet kinetické energie a klidové energie tělesa, a protože už vlastně **jiný druh** energie (než tyto dvě energie - tělesa v klidu a tělesa v pohybu) **neexistuje** , musí tento součet vyjadřovat **veškerou možnou energii tělesa** :

$$\boxed{E = E_{kin} + E_o = m\cdot c^2}$$

celková energie tělesa

Vztah pro kinetickou energii pak bude mít jednoduchý tvar :

$$\boxed{E_{kin} = E - E_o}$$

kinetická energie (vyjádřená pomocí celkové a klidové energie)

Jestliže ještě vypustíme prostřední část rovnice pro celkovou energii , dostaneme pak nejznámější vztah teorie relativity a možná celé moderní fyziky :

$$\boxed{E = m\cdot c^2}$$

Einsteinův vztah *pro celkovou energii*

Tento vztah **přímé úměry hmoty (hmotnosti) a energie** s ní spojené - těchto dvou základních projevů objektivní reality našeho světa - může být chápán jako vyjádření :

„ekvivalence“ hmoty a energie

Pozn.: V kvantové fyzice, kde i energie elektromagnetického pole je spojena s částicemi (fotony) – tj. s objekty, které si obvykle představujeme pod pojmem „hmota" - je pak vhodnější Einsteinův vztah interpretovat jako ekvivalenci hmotnosti a energie.

Speciální teorie relativity nás tak přivádí nejen k **jinému chápání prostoru a času** – základních parametrů vývoje světa (nejsou to již absolutní, nezávislé pojmy, ale jsou nyní vzájemně propojené do výsledného časoprostoru a navíc neoddělitelně spjaté s pohybující se hmotou) - ale tato teorie mění i náš pohled na veškerou **podstatu světa** kolem nás – tím, že vzájemně **spojuje jeho formy** projevu - **hmotu** a **energii** .

Vědecký pohled na svět kolem nás – jako na ***hmotu a energii vyvíjející se v prostoru a čase*** – je tedy dnes úplně jiný než před rokem 1905 …..

Ve fyzice již nemůže platit **zákon zachování hmoty** a odděleně vedle něj **zákon zachování energie** , ale je nutno používat obecný ***zákon zachování hmoty a energie*** .

Ekvivalence hmoty a energie není rozhodně pouze teoretický vztah, ale v současnosti je již mnohonásobně experimentálně potvrzena, zejména v procesech mikrosvěta.

Jako první byl zde objeven ***hmotnostní úbytek jader*** :

Již ze střední školy víte, že podle současného standardního modelu je **jádro atomu** tvořeno ***nukleony*** dvojího druhu - kladnými ***protony*** a neutrálními ***neutrony*** a může být formálně označeno :

$\boxed{{}^{A}_{Z}X}$ nepříklad pro uhlík : $\boxed{{}^{12}_{6}C}$

Nukleonové číslo A udává celkový počet nukleonů a ***protonové číslo*** Z je pak počet protonů v jádře (stejně je také elektronů v elektronovém obalu neutrálního atomu). Počet neutronů v jádře můžeme tedy vyjádřit rozdílem $A - Z$.

Jestliže pak porovnáme celkovou (klidovou) hmotnost jádra m_j s hmotnostmi jednotlivých nukleonů, tj. s (klidovou) hmotností protonů m_p a s (klidovou) hmotností neutronů m_n (jako samostatných, volných částic), zjistíme z pohledu klasické fyziky neuvěřitelnou věc, že **součet hmotností všech nukleonů** daného jádra je **větší než hmotnost jádra** , z nich vytvořeného.

Můžeme si představit, že při „sestavení" jádra z jeho stavebních prvků – nukleonů - nastane úbytek hmotnosti :

$$\boxed{\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_j \neq 0}$$

hmotnostní úbytek jádra

Na rozdíl od počátečního souboru volných samostatných nukleonů je ale výsledné jádro atomu velmi stabilní kompaktní útvar, který „drží pohromadě“ obrovskými přitažlivými silami působícími mezi nukleony (***jaderné síly*** , tzv. ***silná interakce***).

Práce těchto sil při vzniku jádra (při vzájemném přiblížení nukleonů) vytváří pak ***vazební energii*** jádra E - a tato energie dokonale splňuje Einsteinův vztah :

$$\boxed{E = \Delta m \cdot c^2}$$ ***vazební energie jádra***

Pokles hmotnosti je tedy podle Einsteinova vztahu přesně „vykompenzován“ vzniklou „ekvivalentní“ vazební energií jádra.

Ačkoliv je hmotnostní úbytek jádra **velni malý** – asi 1% hmotnosti jádra - podle Einsteinova vztahu, obsahujícímu kvadrát rychlosti světla, tomu ale odpovídá **obrovské množství energie** - řádově megaelektronvolty (MeV) - tj. milionkrát více než vazební energie elektronů v atomu.

A jen menší část této vazební energie (například 10 %) můžeme získat k našemu prospěchu (či zkáze) pomocí vhodných ***jaderných reakcí*** - nejznámější jsou řetězová ***štěpná reakce*** a ***termonukleární syntéza*** jader.

Úspěšné světové demonstrace jejich účinků dávají tušit nesmírnou hodnotu energie která by vznikla při 100 % - ní přeměně hmoty na ekvivalentní energii – při tzv. ***anihilaci hmoty*** – prokázané na částicích mikrosvěta například reakcí elektronu a pozitronu, ve větším měřítku pak díkybohu zatím používané pouze autory sci-fi příběhů.

Vytvořme ještě na závěr velmi užitečný vztah mezi celkovou energií tělesa a jeho hybností. Použijeme v minulé kapitole odvozený vztah pro okamžitou hmotnost :

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

který dosadíme do Einsteinova vztahu :

$$E = m \cdot c^2 = \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot c^2$$

Po umocnění a vydělení rovnice kvadrátem rychlosti světla dostaneme :

$$\frac{E^2}{c^2} = \frac{m_o^2 \cdot c^2}{1-v^2/c^2}$$

Další úpravou bude, že v čitateli zlomku přičteme a odečteme výraz $m_o^2 \cdot v^2$ (tím se čitatel nezmění) . Po formálním přeskupení členů pak dostaneme :

$$\frac{E^2}{c^2} = \frac{m_o^2 \cdot c^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_o^2 \cdot c^2 + m_o^2 \cdot v^2 - m_o^2 \cdot v^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_o^2 \cdot v^2}{1 - v^2/c^2} + \frac{m_o^2 \cdot c^2 - m_o^2 \cdot v^2}{1 - v^2/c^2}$$

První člen je ovšem kvadrát hybnosti, kterou jsme definovali v relativistické dynamice jako :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = \frac{m_o \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

a druhý člen upravíme vytknutím a následným vykrácením :

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + \frac{m_o^2 \cdot c^2 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} = p^2 + m_o^2 \cdot c^2$$

Po vynásobení kvadrátem rychlost světla tak dostaneme :

$$\boxed{E^2 = p^2 \cdot c^2 + m_o^2 \cdot c^4}$$

vztah celkové energie a hybnosti

Tento vztah lze například výhodně použít v kvantové fyzice pro stanovení energie fotonu , který má **nulovou klidovou hmotnost** (jako „představitel“ elektromagnetického vlnění **neexistuje v klidu**) , tedy má i nulovou klidovou energii. Pak bude tedy velmi jednoduše :

$$\boxed{E = p \cdot c}$$

celková energie fotonu

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 04/2005**

rev. 04/2007

Vnitřní energie ideálního plynu podle kinetické teorie

Kinetická teorie plynu, která v první polovině 19.století dokázala úspěšně spojit klasickou fenomenologickou termodynamiku s mechanikou, považuje plyn za soustavu velkého počtu nepatrných hmotných částic – molekul, které jsou v neustálém pohybu (tzv. ***neuspořádaný pohyb***), a pomocí mechanických vlastností těchto částic (jejich hmotnosti, rychlosti, hybnosti, mechanické energie) vysvětluje termodynamické veličiny plynu (tlak a teplotu plynu, jeho vnitřní energii, a také pojem tepelné energie).

Nejjednodušší je aplikace kinetické teorie na ***ideální plyn***, jehož chování jsme popsali v minulé otázce. Zopakujme si jeho základní vlastnost – že **molekuly tohoto plynu na sebe vzájemně nepůsobí žádnými silami** (případně je možno dodat – kromě nepatrných okamžiků vzájemných pružných srážek molekul).

Důsledkem nulových sil mezi molekulami ideálního plynu je potom také **nulová potenciální energie** každé molekuly (neboť tato energie je stanovena prací působící síly, jak je známo z mechaniky).

Z toho dále plyne, že celková mechanická energie (každé) molekuly je tedy tvořena pouze její energií kinetickou, a že **vnitřní energie** plynu jako součet všech energií všech jeho molekul je pak dána **celkovou kinetickou energií** těchto molekul.

Pro maximální možné zjednodušení budeme ještě navíc předpokládat, že molekuly plynu jsou prakticky hmotné body – pak totiž můžeme zanedbat rotační pohyb molekuly a samozřejmě i energii tohoto pohybu.

Toto zanedbání bude zřejmě velmi dobře vyhovovat pro „jednoatomové“ molekuly (He, Ne, Ar, … a také například pro v plazmatu běžně se vyskytující ionizované atomy), jejichž vlastní moment setrvačnosti je jistě zanedbatelně malý.

U větších molekul, skládajících se ze dvou a více atomů pak ovšem bude nutno započítat i kinetickou energii rotace molekuly, případně i energii jejích kmitů.

Neuspořádaný pohyb molekul plynu a jejich stále probíhající vzájemné srážky (a samozřejmě i srážky se stěnami nádoby) vede k tomu, že okamžité rychlosti molekul – jejich směry i velikosti – se neustále mění. Jistě si umíme představit, jak se nějaká vybraná molekula po několika „vhodných srážkách“ téměř zastaví, nebo jak naopak dojde k mnohonásobnému zvýšení její rychlosti (i když jsou to méně pravděpodobné situace), proto můžeme předpokládat, že v jakémkoliv čase mají molekuly plynu různé rychlosti v celém intervalu možných velikostí – tj. od nuly do nekonečna.

Z důvodu obrovského počtu částic (řádu Avogadrova čísla) není ovšem možno sledovat pohyb každé částice a určovat její rychlost, případně její polohu. Přitom rychlosti částic určitě závisejí i na celkovém stavu plynu – například při zahřívání se jistě zvyšuje podíl rychlejších částic.

Metodami matematické statistiky se podařilo r. 1852 ***Maxwellovi*** (James Clerk Maxwell) stanovit tzv. ***rozdělení rychlostí*** (jednoatomových) molekul ideálního plynu ve stavu termodynamické rovnováhy :

Pro počet dN molekul {z celkového počtu N), které mají velikosti svých rychlostí v zadaném intervalu $(v,\ v + dv)$ platí :

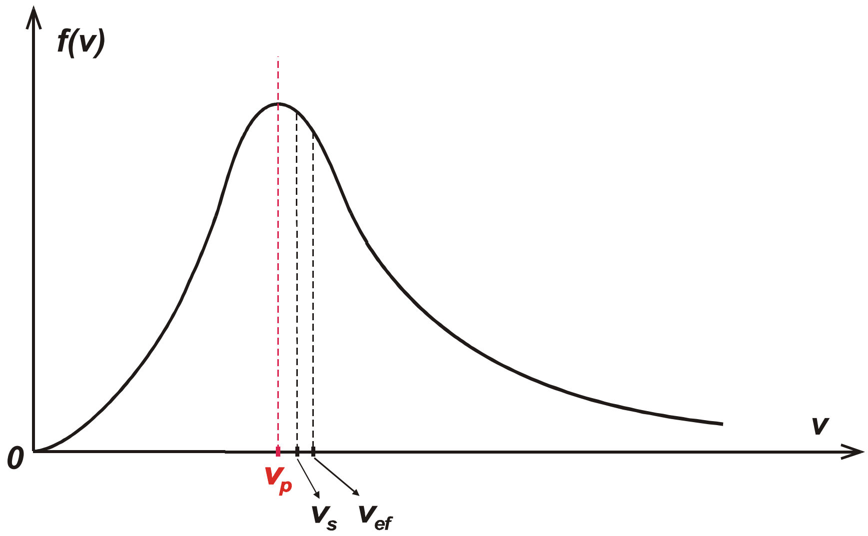
$$dN = 4\pi N \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2 \cdot dv$$

(m je hmotnost jedné molekuly, k je Boltzmannova konstanta a T je absolutní teplota.)

Podíl obou diferenciálů, který má smysl <u>počtu částic v jednotkovém intervalu rychlostí</u> (v místě dané rychlosti v - lze také použít termín <u>*hustota částic*</u> na ose rychlostí) - se pak označuje jako <u>***rozdělovací funkce***</u> :

$$\boxed{f(v) = \frac{dN}{dv} = 4\pi N \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v^2}$$

<u>***Maxwellova rozdělovací funkce***</u>



Pro celý soubor N částic (molekul) plynu je pak možno vypočítat <u>střední rychlost molekul</u> jako aritmetický průměr z rychlostí všech molekul :

$$v_s = \bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_N}{N}$$

Za použití rozdělovací funkce lze převést tento součet jako vážený aritmetický průměr na určitý integrál přes celý obor rychlostí a relativně lehce vypočítat (jde o tzv. Laplaceův integrál) :

$$\boxed{\bar{v} = \frac{1}{N} \cdot \int_0^{\infty} v \cdot dN = \frac{1}{N} \cdot \int_0^{\infty} v \cdot f(v) \cdot dv = \sqrt{\frac{8\,k\,T}{\pi\, m}}}$$

<u>***střední rychlost molekul***</u>

Také se počítá <u>střední kvadratická rychlost</u> molekul jako aritmetický průměr ze všech kvadrátů jednotlivých rychlostí molekul :

$$\boxed{\overline{v^2} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2}{N} = \frac{1}{N} \cdot \int_0^{\infty} v^2 \cdot f(v) \cdot dv = \frac{3kT}{m}}$$

<u>***střední kvadratická rychlost***</u>

Její odmocnina se pak nazývá <u>efektivní rychlost</u> :

$$\boxed{v_{ef} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}}$$ ***<u>efektivní rychlost</u>***

Je zajímavé, že obě tyto rychlosti se příliš neliší (asi o 10 %) od tzv. <u>nejpravděpodobnější rychlosti</u> , která určuje polohu maxima rozdělovací funkce (viz obr) :

$$\boxed{v_P = \sqrt{\frac{2kT}{m}}}$$ ***<u>nejpravděpodobnější rychlost</u>***

Fyzikálně nejdůležitější je efektivní, či střední kvadratická rychlost , protože se používá pro výpočet <u>střední energie jedné molekuly</u> :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v^2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{ef}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{3kT}{m}$$

Po vykrácení dostáváme jeden ze zásadních výsledků kinetické teorie, totiž že střední energie molekuly ideálního plynu ***<u>nezávisí na hmotnosti</u>*** plynu, tj. na druhu plynu :

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T}$$ ***<u>střední energie jedné molekuly</u>***

A <u>celková kinetická energie všech částic</u> (molekul) dohromady bude :

$$E_{kin} = N \cdot \bar{\varepsilon} = N \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

Jestliže vyjádříme počet částic N pomocí <u>látkového množství</u> ν a použijeme definice <u>univerzální plynové konstanty</u> R , tj. :

$$N = \nu \cdot N_A \qquad R = N_A \cdot k$$

Potom dostaneme :

$$E_{kin} = \nu \cdot N_A \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T = \frac{3}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T$$

Protože ideální plyn nemá žádnou potenciální energii, tvoří námi vypočítaná kinetická energie veškerou vnitřní energii U plynu :

$$\boxed{U = E_{kin} = \frac{3}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T}$$ ***<u>vnitřní energie ideálního plynu</u>***

Poznámka : Pro reálný plyn by vnitřní energie byla ovšem určena oběma složkami energie :

$$U = E_{kin} + E_{pot}$$

Vidíme, že vnitřní energie ideálního plynu je funkcí dvou stavových veličin – teploty a látkového množství :

$$U = U\left(\nu, T\right)$$

A tedy při zadaném konstantním množství plynu je vnitřní energie dána pouze teplotou plynu, což nás přivádí k určení významu teploty jako fyzikální veličiny:

Teplota je mírou kinetické energie neuspořádaného pohybu částic látky za stavu termodynamické rovnováhy *(u ideálního plynu je přímo úměrná celkové energii).*

Teplota je stavová veličina, která charakterizuje rovnovážný stav celé termodynamické soustavy (jako celku, tzv. makrostav , uvnitř soustavy jsou pak mikrostavy jednotlivých částic).

Podmínka termodynamické rovnováhy je samozřejmě velmi omezující , proto se ve fyzice definuje teplota i při tzv. lokální termodynamické rovnováze (v daném místě soustavy).

Poznámka : Přesto však někdy teplota neexistuje, např. elektrický výboj v zářivce je typickým silně nerovnovážným systémem: elektrony mají teplotu 25000 K, ionty a molekuly pouze 350 K, nelze pak stanovit celkovou teplotu

Vraťme se zpět k vnitřní energii :

Protože je vnitřní energie jednoznačně určena stavovými veličinami – teplotou a látkovým množstvím – je sama také jednoznačně přiřazena danému stavu - a je ji proto možno rovněž považovat za ***stavovou veličinu*** (vidíme ovšem určitý rozdíl, proto se někdy stavové veličiny rozlišují na stavové proměnné a stavové funkce, případně termodynamické potenciály).

Jestliže se nám podařilo určit přesný funkční vztah pro vnitřní energii, můžeme nyní vypočítat její nekonečně malý přírůstek (změnu), tzv. ***úplný diferenciál*** , jako matematický diferenciál funkce dvou proměnných :

$$dU = dU(\nu, T) = \frac{\partial U}{\partial \nu} \cdot d\nu + \frac{\partial U}{\partial T} \cdot dT$$

Při daném množství plynu pak jednodušeji :

$$dU = dU(T) = \frac{dU}{dT} \cdot dT = \frac{3}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot dT$$

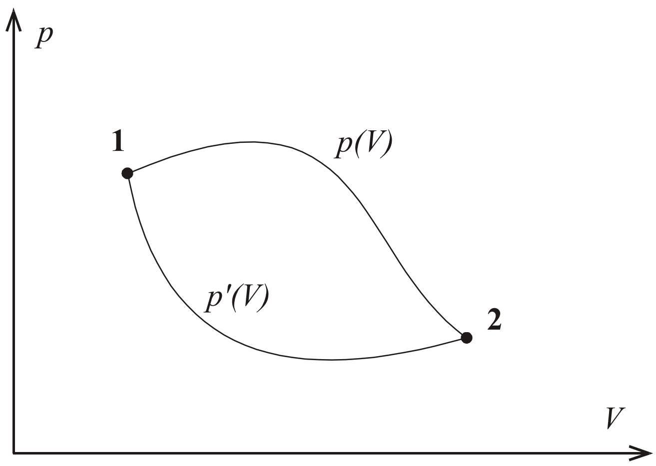
Dále můžeme určit celkovou ***změnu vnitřní energie*** - při nějakém termodynamickém procesu – např. při přechodu ze stavu 1 (určeného stavovými veličinami p_1, V_1, T_1, ν) do stavu 2 (p_2, V_2, T_2, ν) :

$$\Delta U = \int_1^2 dU = \int_1^2 \frac{3}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot dT = \frac{3}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{3}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot \left(T_2 - T_1\right)$$

Po roznásobení vidíme, že změna vnitřní energie je jednoduše dána rozdílem vnitřních energií v počátečním a koncovém stavu :

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T_2 - \frac{3}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T_1 = U_2 - U_1$$

Termodynamický proces můžeme graficky znázornit jako křivku spojující počáteční a koncový stav v nějaké „soustavě souřadnic“ stavových veličin, např. v oblíbeném ***p-V diagramu*** :



Pak můžeme konstatovat, že náš výpočet změny vnitřní energie při určitém termodynamickém procesu nezávisí na „dráze“ – integrační cestě (křivce procesu), ale závisí pouze na počátečním a koncovém stavu.

Pro dva různé procesy (vedoucí od 1. do 2.stavu), tj. pro dvě různé křivky $p(V)$ a $p'(V)$ spojující tyto stavy, tedy bude platit rovnost integrálů :

$$\boxed{\underset{(p)}{\int_1^2} dU = \underset{(p')}{\int_1^2} dU}$$

Převedeme na levou stranu a upravíme :

$$\underset{(p)}{\int_1^2} dU - \underset{(p')}{\int_1^2} dU = 0$$

$$\underset{(p)}{\int_1^2} dU + \underset{(p')}{\int_2^1} dU = 0$$

A protože se jedná o libovolné dva stavy a libovolné křivky mezi těmito stavy, dostáváme na levé straně rovnice integrál platný pro libovolnou uzavřenou křivku :

$$\boxed{\oint dU = 0}$$

Celková ***změna vnitřní energie je tedy nulová*** při jakékoliv uzavřené integrační cestě (křivce) – tj. při tzv. ***uzavřeném*** („kruhovém“) termodynamickém procesu.

Vnitřní energie plynu je tak formálně matematicky podobná potenciální energii v konzervativním silovém poli. Vnitřní energie se proto řadí mezi tzv. ***termodynamické potenciály*** a vzniklo nám pro ni několik ekvivalentních podmínek :

$$\boxed{U \text{ je stavová veličina}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\text{existuje úplný diferenciál } dU}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\int_1^2 dU = konst}$$

(změna vnitřní energie závisí pouze na počátečním a koncovém stavu).

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\oint dU = 0}$$

(při uzavřeném procesu se vnitřní energie nezmění)

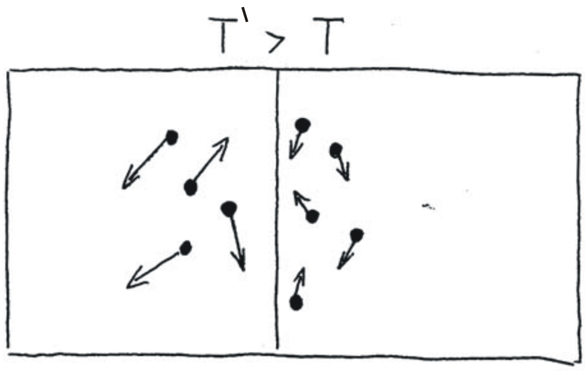
Tyto vztahy jsou teoreticky velmi užitečné a umožňují jednoznačné a pohodlné rozlišení stavových a „nestavových“ veličin v termodynamice, jak uvidíme i v další kapitole. Povšimněte si také formální podoby s podmínkami konzervativnosti silových polí .

(konec kapitoly)

Teplo, práce a 1. věta termodynamiky

Teplo (tepelná energie)

Nyní již víme, že látka (plyn) s vyšší teplotou obsahuje částice (molekuly), které se pohybují s vyššími rychlostmi a můžeme posoudit, co se stane při styku s látkou o teplotě nižší.



Je zřejmé, že ve vzájemných srážkách se budou pomalejší částice urychlovat a rychlejší částice budou zpomalovat, tzn. že rychlejší částice budou předávat část své kinetické energie částicím pomalejším. Vnějším důsledkem tohoto „mikroskopického“ procesu bude zvyšování teploty chladnější látky, tj. nárůst její vnitřní energie (a ochlazování látky teplejší, pokles její vnitřní energie).

Tento jev pak popisujeme slovy, že teplo přechází z látky teplejší na látku chladnější. Fyzikální veličinu ***teplo (tepelná energie)*** tedy definujeme :

> ***Teplo je mikroskopickým způsobem (srážkami částic látky) předávaná část vnitřní energie látky.***

Poznámka: Proces přenosu tepla by zřejmě pokračoval tak dlouho, dokud by se teploty obou těles nevyrovnaly – pak by nastal rovnovážný stav, kdy už by se teploty dále neměnily – stav termodynamické rovnováhy. Přechod tepla z látek teplejších na látky chladnější je tedy jedním ze základních procesů, které vedou termodynamickou soustavu k tomuto stavu.

Vidíme tedy jasně, že na rozdíl od vnitřní energie není teplo spojené se stavem látky, ale je to veličina spojená s nějakým termodynamickým procesem (ohřívání nebo ochlazování).

Teplo není stavová veličina , je to veličina ***procesní*** .

Protože víme, že vnitřní energie je úměrná teplotě a množství látky, jistě nás nepřekvapí principiálně stejná závislost pro energii tepelnou, která je její částí :

Už ze střední školy znáte vztah pro teplo Q potřebné k ohřátí látky o hmotnosti m z teploty T_1 na teplotu T_2 (jinak řečeno - o teplotní rozdíl ΔT) :

$$Q = c \cdot m \cdot (T_2 - T_1) = c \cdot m \cdot \Delta T$$

Koeficient úměry c se nazývá ***měrná tepelná kapacita*** a má význam množství tepla potřebného k ohřátí jednotkové hmotnosti o jednotkový teplotní rozdíl [$J.kg^{-1}.K^{-1}$]. Není to ovšem obecně konstanta, jak se vždy předpokládalo v početních příkladech, ale proměnná veličina závisející na stavu látky a i na způsobu ohřevu :

$$c = c(T, p, V)$$

Proto je nutné přejít k velmi malým – diferenciálním veličinám, tj. vyjádřit nejprve množství tepla potřebné k ohřátí látky o diferenciální teplotní rozdíl :

$$dQ = c \cdot m \cdot dT$$

A teprve potom můžeme vypočítat celkové teplo potřebné k ohřevu látky z teploty T_1 na teplotu T_2, obecně řečeno při nějakém termodynamickém procesu ze stavu 1 (p_1, V_1, T_1) do stavu 2 (p_2, V_2, T_2), jako „součet“ těchto diferenciálních veličin – tj. integrál :

$$Q = \int_1^2 dQ = \int_{T_1}^{T_2} c \cdot m \cdot dT = m \cdot \int_{T_1}^{T_2} c \cdot dT$$

Samozřejmě, v případě <u>konstantní</u> měrné tepelné kapacity musíme dostat původní středoškolský vztah :

$$Q = c \cdot m \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT = c \cdot m \cdot (T_2 - T_1)$$

Podobně jako ve stavové rovnici i při výpočtu tepla se často (u plynů) používá místo hmotnosti veličina ***<u>látkové množství</u>*** , pro kterou platí (viz kapitola „Ideální plyn“) :

$$m = \nu \cdot M_{mol}$$

Pak bude mít vztah pro diferenciální teplo tvar :

$$dQ = c \cdot m \cdot dT = c \cdot \nu \cdot M_{mol} \cdot dT = \nu \cdot C \cdot dT$$

Jde tedy principiálně o stejný vztah přímé úměry, ale s jiným koeficientem C, který se nyní nazývá ***<u>molární tepelná kapacita</u>*** [J.mol^{-1}.K^{-1}]

Již v kapitole „Ideální plyn“ jsme si uvědomili, že proces zahřívání plynu je složitější než u pevné látky či kapaliny : při zvyšování teploty může plyn zvětšovat svůj objem (roztažnost plynu) nebo tlak (rozpínavost plynu) nebo obecně objem i tlak současně.

Jak poznáte v kapitole následující, při <u>zvětšování svého objemu koná plyn mechanickou práci</u>, na kterou se pak mění část dodávaného tepla a ohřev plynu není tolik „efektivní“ jako při udržování konstantního objemu, tzn. na ohřev daného množství látky o jednotkový teplotní interval se spotřebuje větší množství tepla - molární tepelná kapacita bude tedy větší.

Definujeme proto **dva mezní způsoby ohřívání plynu** :

a) při konstantním objemu plynu, tj. <u>při izochorickém ději</u> (roztažnost plynu podle zákona Boyle-Mariottova), kdy plyn nepracuje a veškeré dodané teplo se spotřebuje na jeho ohřev :

$$\boxed{dQ = \nu \cdot C_V \cdot dT}$$ ***<u>izochorický ohřev</u>***

Potom molární <u>tepelná kapacita</u> při konstantním objemu má <u>nejmenší možnou hodnotu</u> stejně jako potřebné diferenciální teplo a také ***<u>celkové potřebné (dodané) teplo</u>*** při <u>izochorickém ohřevu</u> z teploty T_1 na teplotu T_2 :

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} dQ = \nu \cdot \int_{T_1}^{T_2} C_V \cdot dT$$

b) při konstantním tlaku plynu, tj. <u>při izobarickém ději</u> (rozpínavost plynu opět podle zákona Boyle-Mariottova), kdy <u>se část dodané tepelné energie mění na práci plynu</u>. Rovnice pro teplo má stejný tvar, ale s jinou (větší) molární tepelnou kapacitou :

$$\boxed{dQ = \nu \cdot C_p \cdot dT}$$ ***<u>izobarický ohřev</u>***

Je tedy vždy :

$$C_p > C_V$$

a molární tepelná kapacita při konstantním tlaku má maximální možnou hodnotu, stejně jako dodané diferenciální teplo i ***<u>celkové dodané teplo</u>*** při <u>izobarickém ohřevu</u> z T_1 na T_2 :

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} dQ = \nu \cdot \int_{T_1}^{T_2} C_p \cdot dT$$

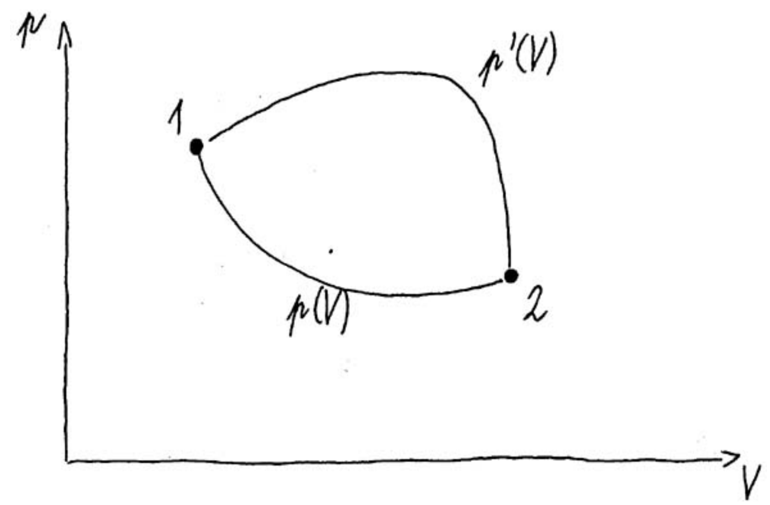
Jak uvidíme později, pro ideální plyn bude platit :

$$\boxed{C_p = C_V + R}$$ ***<u>Meyerův vztah</u>***

Při nějakém obecném procesu, kdy by došlo k menším objemovým změnám než v případě b), by tedy molární tepelná kapacita i dodané teplo byly jistě mezi uvedenými mezními hodnotami.

Vidíme, že <u>velikost dodaného tepla</u> při nějakém termodynamickém procesu ***<u>závisí na způsobu (druhu) tohoto procesu</u>***.

<u>Různé termodynamické procesy</u> při ohřevu plynu z teploty T_1 na teplotu T_2 – obecně při přechodu ze stavu 1 (p_1, V_1, T_1) do stavu 2 (p_2, V_2, T_2) - je možno znázornit jako ***<u>různé křivky</u>*** , např. $p(V)$ a $p'(V)$ spojující oba stavy – viz obrázek.



Odlišná množství dodané tepelné energie při těchto procesech zapíšeme matematicky :

$$\underset{(p)}{\int_1^2} dQ \neq \underset{(p')}{\int_1^2} dQ$$

A po převodu pravého integrálu na levou stranu (jako jsme to již dělali u vnitřní energie, tam se ovšem jednalo o rovnici), dostaneme zásadní výsledek, a to že ***teplo přijaté látkou při kruhovém termodynamickém ději je vždy různé od nuly*** :

$$\oint dQ = Q \neq 0$$

Pro teplo dostáváme tedy vztahy analogické jako u vnitřní energie, ale s opačnými výsledky.

Všimněme si ještě odlišnosti diferenciálů těchto veličin : zatímco dU je skutečný diferenciál funkce U, v případě tepla neexistuje funkce Q, kterou bychom mohli diferencovat. Přesto však existuje nekonečně malá veličina přijatého tepla dQ, pro kterou máme exaktní vzorec – matematicky je to tzv. ***neúplný diferenciál*** (často se i odlišně označuje – jako δQ).

Pro procesní veličinu teplo (přijaté látkou – termodynamickou soustavou) tak můžeme napsat čtyři ekvivalentní tvrzení :

Q není stavová veličina	*(je to procesní veličina)*
$\Updownarrow$	
dQ není úplný diferenciál	*(dQ je neúplný diferenciál)*
$\Updownarrow$	
$\int_1^2 dQ \neq konst.$	*(teplo přijaté látkou závisí na druhu procesu)*
$\Updownarrow$	
$Q = \oint dQ \neq 0$	*(teplo přijaté při kruhovém ději je vždy různé od nuly)*

Poznámka: Z matematického hlediska může být přijaté teplo kladné i záporné – bude tím označen směr přenosu tepelné energie :

$\boxed{Q\,,dQ \;>\; 0}$	teplo přijaté látkou, odevzdané okolím
$\boxed{Q\,,dQ \;<\; 0}$	teplo odevzdané látkou, přijaté okolím

Práce plynu

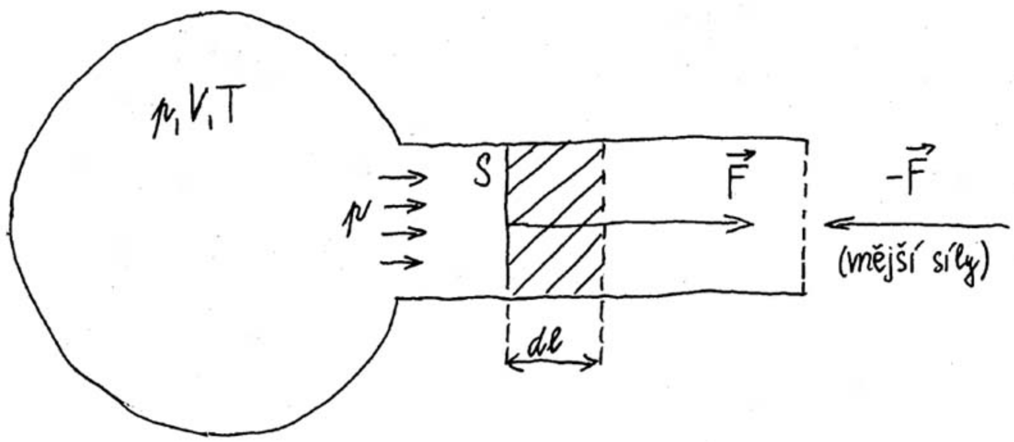
Důsledkem tlaku plynu je vznik sil působících na všechny plochy ohraničující objem plynu (stěny nádoby), přičemž musí platit :

$$\boxed{p = \frac{F}{S}}$$

definice tlaku

Rovnice je skalární, tlaková síla F je vždy kolmá na plochu S, na kterou působí (to platí pro plyny i pro kapaliny). Aby však tato síla konala nějakou práci, muselo by se její působiště, tj. plocha (stěny plynu), ještě pohybovat po nějaké dráze.

Na obrázku je znázorněna praktická realizace této podmínky – válec s pohyblivým pístem :



Na plochu pístu S vyvíjí tlak plynu sílu F podle horního vztahu :

$$F = p \cdot S$$

Za stavu klidu – termodynamické rovnováhy – je tato síla vyrovnávána vnějšími silami. Má-li ovšem začít nějaký termodynamický proces spojený s prací plynu, musí se samozřejmě rovnováha poněkud narušit, aby se mohl píst dát do pohybu (směrem vpravo).

Je zřejmé, že přitom se původní objem V plynu bude zvětšovat, a dojde tedy k poklesu tlaku a také síly působící na píst. Při výpočtu práce tedy musíme nejprve vypočítat elementární práci dA při nekonečně malé dráze – při posunu pístu dl (viz obr., dráha i síla jsou rovnoběžné) :

$$dA = F \cdot dl$$

Dosadíme za sílu :

$$dA = p \cdot S \cdot dl$$

Součin plochy a elementárního posunu je ale objem vyšrafovaný na obrázku, který představuje přírůstek (změnu) původního objemu V plynu – matematicky to je diferenciál tohoto objemu :

$$S \cdot dl = dV$$

Vztah pro elementární práci tedy bude velmi jednoduchý :

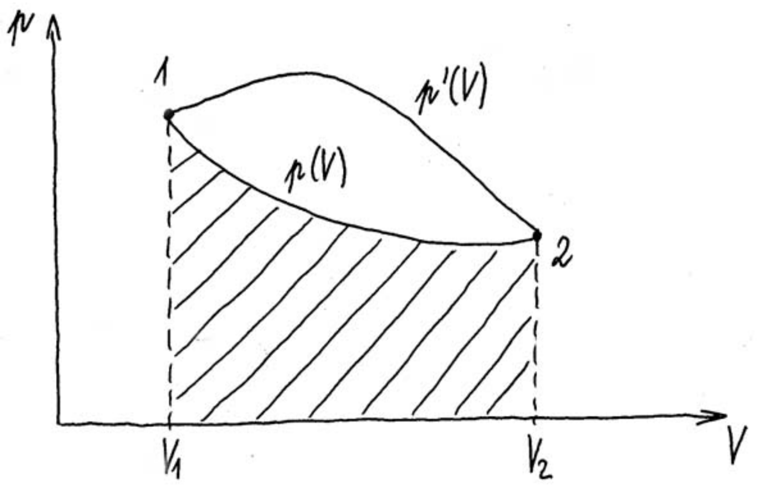
$$\boxed{dA = p \cdot dV}$$ ***elementární práce plynu***

Tato „transformace“ dráhy pístu na změnu objemu plynu je velmi efektivní – jednak jsme vyjádřili práci plynu pomocí jeho stavových veličin a také se „automaticky“ prozradí, kdo koná práci : pokud bude diferenciál objemu záporný, znamená to zmenšení objemu plynu, tedy pohyb pístu doleva a práce plynu je záporná – plyn „podléhá“ práci, kterou konají opačné vnější síly z okolí.

Po stanovení elementární práce pak můžeme pokračovat výpočtem ***celkové práce plynu*** při nějakém termodynamickém procesu ze stavu plynu 1 (p_1, V_1, T_1) do stavu 2 (p_2, V_2, T_2), která bude dána integrálem :

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} p(V) \cdot dV$$

V průběhu tohoto procesu se tlak plynu obecně mění (byl by konstantní pouze ve zvláštním případě děje izobarického), což je na p-V diagramu znázorněno křivkou $p(V)$ spojující stav 1 a 2. Tato křivka tedy charakterizuje daný termodynamický proces a protože náš integrál má v tomto grafu velikost rovnou plošnému obsahu obrazce pod křivkou, vidíme jasně závislost vykonané práce A na druhu procesu (protože pro nějakou jinou křivku $p'(V)$ - tj. pro jiný proces - bude i tento obsah jiný).



Práce plynu je tedy jednoznačně ***procesní veličina*** a matematické vztahy budou analogické jako u plynem přijatého tepla. Nejprve zapíšeme závislost práce na integrační cestě :

$$\underset{(p)}{\int_1^2} dA \neq \underset{(p')}{\int_1^2} dA$$

Po převodu pravého integrálu na levou stranu nás bude vzniklý integrál po uzavřené křivce informovat, že práce vykonaná plynem při kruhovém ději je vždy různá od nuly :

$$\oint dA = A \neq 0$$

Diferenciál dA také samozřejmě není úplným diferenciálem (neexistuje funkce stavu A) a pro práci plynu dostáváme tedy opět známou čtveřici vztahů :

A není stavová veličina	*(je to procesní veličina)*
$\Updownarrow$	
dA není úplný diferenciál	*(dA je neúplný diferenciál)*
$\Updownarrow$	
$\int_1^2 dA \neq konst.$	*(vykonaná práce závisí na druhu procesu)*
$\Updownarrow$	
$A = \oint dA \neq 0$	*(práce vykonaná při kruhovém ději je vždy různá od nuly)*

Poznámka: Také práce může být kladná i záporná – jak jsme již dříve konstatovali :

$\boxed{A, dA > 0}$ práce vykonaná plynem

$\boxed{A, dA < 0}$ práce vykonaná okolím

1. věta termodynamiky

Definice tepelné energie jako přijaté nebo odevzdané části energie vnitřní nám také ukazuje jasný vztah obou těchto veličin : **Přijme-li (odevzdá-li) plyn určité množství tepla, musí se to projevit vzrůstem (poklesem) vnitřní energie o stejnou hodnotu.**

Stejnou jednoznačnou závislost ovšem odhalíme ve vztahu vnitřní energie a práce termodynamické soustavy (plynu) : Jediným „zdrojem" síly, která posunuje píst ve válci a koná tak mechanickou práci jsou nárazy pohybujících se molekul na tento píst. Při každé takové srážce se (původně nehybný) píst dá do pohybu (a koná práci) a naopak rychlost molekuly poklesne (podle zákona zachování hybnosti), poklesne tedy i její kinetická energie.

Přesně podle definice mechanické energie (zde kinetické) jako schopnosti vykonat práci se tak bude kinetická energie molekul plynu – **tj. vnitřní energie – přeměňovat na vykonanou práci stejné velikosti.**

Jestliže bude plyn konat zápornou práci, tj. skutečnou práci konají síly okolí a píst se posunuje doleva, bude tento pohyb „proti" nalétávajícím molekulám zvyšovat jejich rychlost, tj. zvyšovat vnitřní energii plynu.

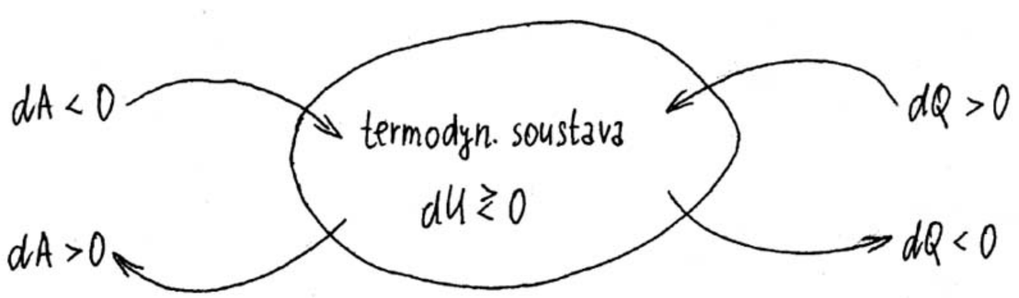
Celkem tedy můžeme konstatovat, že ***teplo dodávané plynu zvyšuje jeho vnitřní energii a práce plynem konaná ji o stejnou hodnotu snižuje :***

$$\boxed{dU = dQ - dA}$$

1.věta termodynamiky (diferenciální tvar)

Odvodili jsme tak základní zákon termodynamiky (v diferenciálním tvaru), tzv. ***1.větu termodynamiky*** , která neznamená nic jiného než ***zákon zachování energie*** termodynamické soustavy (plynu).

Nezapomeňte, že u všech veličin připouštíme kladné i záporné hodnoty, což u změny vnitřní energie znamená jen to, zda jde o její zvýšení nebo snížení, přírůstek nebo úbytek, ale u tepla a práce to však znamená směr „toku, přenosu“ příslušné formy energie (viz obrázek – tzv. konvence tepelného stroje).



Matematiký diferenciální tvar 1. věty můžeme samozřejmě integrovat pro libovolný termodynamický proces probíhající ze stavu 1 do stavu 2 :

$$\int_1^2 dU = \int_1^2 dQ - \int_1^2 dA$$

A dostaneme vztah celkové změny vnitřní energie při tomto procesu a celkového dodaného tepla a celkové vykonané práce :

$$\boxed{\Delta U = Q - A}$$

1.věta termodynamiky (integrální tvar)

Principiálně jde ovšem o stejnou závislost, která nyní nepopisuje malé diferenciální veličiny, ale celý termodynamický proces. U obou tvarů 1.věta termodynamiky si můžeme uvědomit, že práce s opačným znaménkem, tj. $-A$ ($-dA$) je práce vnějších sil a pak slovní formulace může znít :
Zvýšení vnitřní energie termodynamické soustavy je tvořeno součtem dodaného tepla a práce vykonané vnějšími silami (okolím termodynamické soustavy).

Z matematického hlediska může být na levé straně rovnice také dodané teplo a dostaneme tak ekvivalentní tvar 1.věty :

$$Q = \Delta U + A$$

$$dQ = dU + dA$$

který lze také velmi hezky vyjádřit : ***Teplo dodané plynu (termodynamické soustavě) se spotřebuje na zvýšení jeho vnitřní energie a na konání práce plynem.***

A třetí varianta je „technicky“ nejdůležitější :

$$A = Q - \Delta U$$

$$dA = dQ - dU$$

protože nám říká, že ***plyn může konat práci buď přeměnou z dodaného tepla, nebo na úkor své vnitřní energie.***

Nebo stručněji a obecněji :

Práci je možno konat pouze přeměnou z jiných forem energie.

Tuto větičku se snažili popřít desítky urputných vynálezců 19.století, aby samozřejmě nakonec rezignovaly : **Nelze sestrojit „perpetum mobile“** (1.druhu), stroj věčně pracující, který by konal mechanickou práci a nespotřebovával přitom ekvivalentní množství nějaké jiné energie.

Tepelné stroje a 2. věta termodynamiky

Vzorec pro práci plynu a 1.věta termodynamiky jasně ukazují možnost konstrukce tzv. ***tepelného stroje*** , který by využíval dodávané tepelné energie ke konání mechanické práce.

Práce stroje je obecně chápána ne jako jednorázový akt, ale jako (libovolně) dlouho trvající spojitý proces, složený z určitých, pravidelně se opakujících (pracovních a pomocných) dějů – tzv. ***periodicky (cyklicky) pracující stroj*** .

Jestliže takový tepelný stroj pracuje s nějakou plynovou náplní, pak požadavek opakujících se, periodických termodynamických procesů vede k tomu, že po určité době – periodě opakování – se plyn musí nutně dostat do stejného stavu – tzn. že křivka takového procesu (např. v p-V diagramu) musí být uzavřená.

Periodicky pracující tepelný stroj využívá při své činnosti uzavřený (kruhový) termodynamický proces (cyklus).

Tato podmínka nám velmi zjednoduší aplikaci 1.věty termodynamiky, neboť použijeme-li její diferenciální tvar :

$$dA = dQ - dU$$

a integrujeme-li ho přes uzavřenou integrační cestu :

$$\oint dA = \oint dQ - \oint dU$$

Pak poslední výraz bude nulový (stavová veličina) a dostáváme :

$$\boxed{A = Q}$$ ***vykonaná práce a dodané teplo při kruhovém procesu***

Práce vykonaná plynem při kruhovém termodynamickém procesu se tak přímo rovná dodanému teplu.

Zdálo se, že tento vztah otevírá nadějnou možnost praktické konstrukce tepelného stroje, pracujícího na základě kruhového děje, řádně podle zákona zachování energie (žádné perpetuum mobile), s úžasnou 100% - ní účinností přeměny dodaného tepla na mechanickou práci.

O to větší bylo zklamání tvůrců prvních parních strojů, jejichž využití tepelné energie dosahovalo pouze nepatrné části této hodnoty a zásadní zvýšení účinnosti nepřinášelo ani další zdokonalování konstrukce strojů.
„Něco podivného“ stále bránilo dokonalé přeměně tepelné energie na mechanickou práci a další vývoj ukázal, že jde o překážky velmi principiální a že tepelný stroj s účinností 100% je stejně nereálný jako stroj, který by konal práci „z ničeho“ – tj. odporoval by zákonu zachování energie (perpetuum mobile).

Jádro problému bylo v tom, že 1.věta termodynamiky – zákon zachování energie – se ukázala být pouze nutnou podmínkou existence (realizace) termodynamických procesů, nikoliv však podmínkou postačující, neboť lze popsat velké množství procesů splňujících tento zákon, které však nikdy reálně neproběhnou.

Typickými „nikdy neprobíhajícími procesy“ jsou neexistující zpětné děje nevratných procesů, které jsme poznali v minulé kapitole. Mezi všemi možnými nevratnými ději se pak považuje za principiálně nejvýznamnější skupina ***samovolných (přirozených) procesů*** , které během konečné relaxační doby přivedou každou izolovanou nerovnovážnou soustavu do stavu termodynamické rovnováhy :

1) ***Přechod tepla z tělesa teplejšího na těleso chladnější.***

2) ***Expanze plynu do místa nižšího tlaku (do vakua).***

3) ***Difúze plynu.***

4) ***Přeměna mechanické energie makroskopických těles na teplo.***

Všechny tyto děje jsou způsobeny či spojeny s „tepelným“ pohybem částic hmoty, proto byl proces přenosu tepla považován za teoreticky nejdůležitější, zejména když se také ukázalo, že právě směr přechodu tepla omezuje účinnost práce tepelného stroje.

Proto fyzikové v polovině 19.století usilovně hledali kritéria, kterými by doplnili 1.větu termodynamiky, a upřesnili tak podmínky realizace termodynamických procesů – tak vznikla ***2.věta termodynamiky***.

2.věta termodynamiky existuje v několika variantách (které se od sebe ještě mohou lišit v různých učebnicích) – od formulace „technické“ týkající se činnosti tepelného stroje až po formulaci velmi teoretickou :

1) ***Není možno sestrojit periodicky pracující stroj, který by nezpůsoboval nic jiného, než že by ochlazoval tepelnou lázeň a konal rovnocennou práci. (William Thomson = lord Kelvin – 1851, Max Planck)***

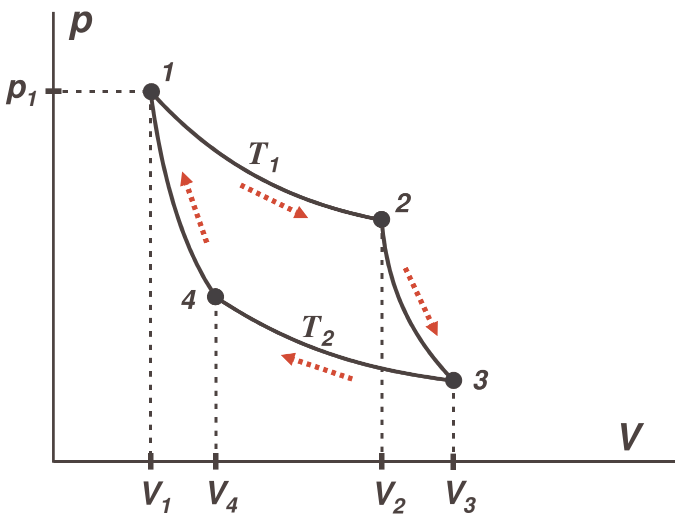
2) ***Není možno sestrojit perpetum mobile druhého druhu. (Friedrich Wilhelm Ostwald)***

3) ***Teplo nemůže samovolně přecházet ze studenějšího tělesa na teplejší. (Rudolf Julius Emanuel Clausius - 1850)***

4) ***V každém libovolném okolí libovolného počátečního stavu termicky homogenního systému existují stavy, k nimž se není možno libovolně přiblížit adiabatickou změnou stavových parametrů. (Constantin Carathéodory, řecký matematik - 1909)***

Neexistující ***tepelný stroj, který by dokonale přeměňoval tepelnou energii na práci***, je tedy nazván ***perpetum mobile druhého druhu***
(perpetum mobile prvního druhu je neexistující stroj, který „nedodržuje“ zákon zachování energie)

Souvislost takového stroje se směrem přechodu tepelné energie dobře poznáme, jestliže prostudujeme činnost ideálního „vzorového“ tepelného stroje, pracujícího na principu ***Carnotova vratného kruhového děje*** (cyklu), který je sestaven ze čtyř jednoduchých vratných procesů ideálního plynu (viz obrázek).



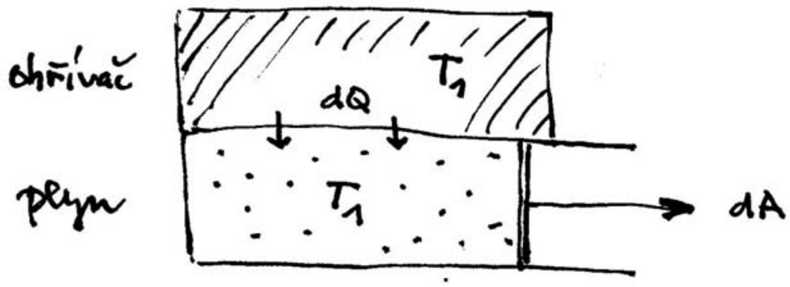
Popišme nyní podrobně jednotlivé „větve“ tohoto cyklu, podmínky jejich realizace a vzájemnou přeměnu energií (viz také minulá kapitola) :

1. Izotermická expanze

Při teplotě T_1 = konst. dochází k izotermické expanzi plynu ze stavu 1 (p_1,V_1,T_1) do stavu 2 (p_2,V_2,T_1) podle stavové rovnice :

$$p_1 \cdot V_1 \;=\; p_2 \cdot V_2$$

Podmínkou realizace tohoto izotermického procesu, která zaručí jeho konstantní teplotu, je dokonalý tepelný styk plynu se zdrojem tepla, tzv. ohřívačem :



Konstantní teplota pak znamená, že se nemění vnitřní energie plynu a podle 1.věty se tedy dodané teplo přímo přeměňuje na práci stejné velikosti :

$$dA \;=\; dQ - dU \;=\; dQ$$

Potom celková práce vykonaná plynem a teplo dodané plynu při celé expanzi bude (viz minulá kapitola) :

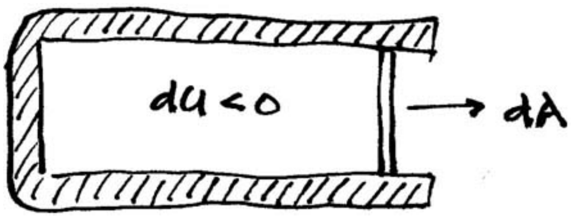
$$A_1 \;=\; Q_1 \;=\; \int_1^2 p \cdot dV \;=\; \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \;=\; \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad > 0$$

2. Adiabatická expanze

Adiabatická expanze plynu ze stavu 2 (p_2,V_2,T_1) do stavu 3 (p_3,V_3,T_2) probíhá podle stavové rovnice :

$$p_2 \cdot V_2^{\kappa} \;=\; p_3 \cdot V_3^{\kappa}$$

Tento proces musí probíhat při dokonalé tepelné izolaci , která zaručí nulovou výměnu tepla s okolím :



Plyn tedy koná práci pouze na úkor své vnitřní energie :

$$dA = dQ - dU = -dU$$

Celková vykonaná práce plynem se potom projeví snížením vnitřní energie plynu, tj. poklesem teploty plynu z T_1 na T_2 :

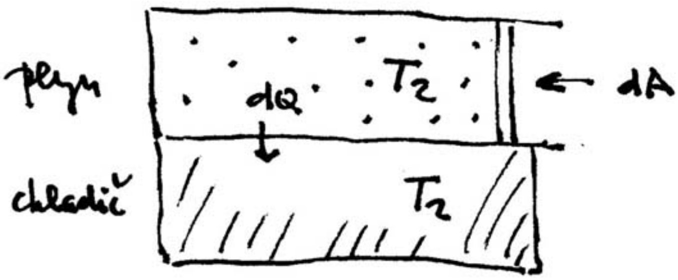
$$A_2 = -\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} -\nu \cdot C_V \cdot dT = -\nu \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1) \quad > 0$$

3. Izotermická komprese

Při teplotě T_2 = konst. dochází k izotermické kompresi plynu ze stavu 3 (p_3,V_3,T_2) do stavu 4 (p_4,V_4,T_2) podle stavové rovnice :

$$p_3 \cdot V_3 = p_4 \cdot V_4$$

Konstantní teplotu plynu musí opět zaručit dokonalý tepelný styk s jímačem tepla, tzv. chladičem :



Konstantní teplota plynu opět znamená, že vnitřní energie plynu se nemění a podle 1.věty se opět práce plynu rovná dodanému teplu :

$$dA = dQ - dU = dQ$$

Obě tyto veličiny jsou ovšem nyní – při stlačování plynu – záporné. Práci tedy konají vnější síly a je „dodávána" do plynu a záporné teplo znamená, že tepelná energie je plynu odebírána a přechází z plynu do okolí – do chladiče.

Při celé kompresi vykonaná práce a dodané teplo budou :

$$A_3 = Q_2 = \int_3^4 p \cdot dV = \nu \cdot R \cdot T_2 \cdot \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V} = \nu \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} \quad < 0$$

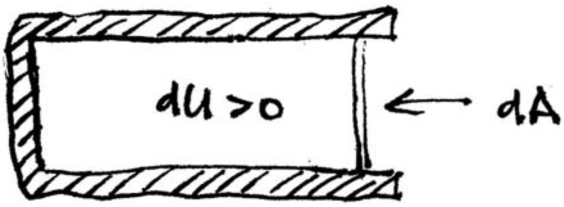
(Dodané teplo je označeno v pořadí jako druhé v Carnotově cyklu, rovněž při druhé teplotě)

4. Adiabatická komprese

Adiabatická komprese plynu ze stavu 4 (p_4,V_4,T_2) do počátečního stavu 1 (p_1,V_1,T_1) probíhá podle stavové rovnice :

$$p_4 \cdot V_4^{\kappa} \;=\; p_1 \cdot V_1^{\kappa}$$

Plyn je opět dokonale tepelně izolován od okolí :



Matematický zápis pro vykonanou práci podle 1.věty je stejný jako při adiabatické expanzi :

$$dA \;=\; dQ - dU \;=\; -dU$$

Nyní je ovšem práce plynu záporná, protože při kompresi ji konají vnější síly – práce je „dodávána" do plynu a za celou kompresi se projeví zvýšením vnitřní energie a zvýšením teploty z T_2 na původní hodnotu T_1 :

$$A_4 \;=\; -\Delta U \;=\; \int_{T_2}^{T_1} -\nu \cdot C_V \cdot dT \;=\; -\nu \cdot C_V \cdot (T_1 - T_2) \;<0$$

Vykonaná práce při adiabatické kompresi je tedy přesně opačná než při expanzi – zvýšení vnitřní energie je tak přesně stejné, jako bylo její snížení a celková změna vnitřní energie je nulová, jako u každého kruhového termodynamického procesu.

Plyn se navrátil do počátečního stavu, křivka děje se uzavřela a práce tepelného stroje může dále pokračovat libovolným počtem opakování tohoto cyklu.

Nyní provedeme ***celkovou bilanci energií*** :

a) Celkem nezajímavý je pohled na vnitřní energii plynu, která z původní hodnoty odpovídající počáteční teplotě :

$$U_1 \;=\; \nu \cdot C_V \cdot T_1$$

poklesla při adiabatické expanzi na hodnotu :

$$U_2 \;=\; \nu \cdot C_V \cdot T_2$$

A při adiabatické kompresi do počátečního stavu plynu se vnitřní energie opět vrátila na původní hodnotu, jak se sluší na stavovou veličinu.

b) Celkovou práci plynem vykonanou při celém kruhovém Carnotově cyklu dostaneme jako součet všech dílčích prací :

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 =$$
$$= \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot ln\frac{V_2}{V_1} - \nu \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1) + \nu \cdot R \cdot T_2 \cdot ln\frac{V_4}{V_3} - \nu \cdot C_V \cdot (T_1 - T_2)$$

Práce při adiabatických dějích (A_2, A_4) se vyruší, potom :

$$A = A_1 + A_3 = \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot ln\frac{V_2}{V_1} + \nu \cdot R \cdot T_2 \cdot ln\frac{V_4}{V_3}$$

K úpravě tohoto vztahu použijeme stavové rovnice jednotlivých dějů Carnotova cyklu :

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$
$$p_2 \cdot V_2^\kappa = p_3 \cdot V_3^\kappa$$
$$p_3 \cdot V_3 = p_4 \cdot V_4$$
$$p_4 \cdot V_4^\kappa = p_1 \cdot V_1^\kappa$$

Všechny rovnice vynásobíme :

$$p_1 \cdot V_1 \cdot p_2 \cdot V_2^\kappa \cdot p_3 \cdot V_3 \cdot p_4 \cdot V_4^\kappa = p_2 \cdot V_2 \cdot p_3 \cdot V_3^\kappa \cdot p_4 \cdot V_4 \cdot p_1 \cdot V_1^\kappa$$

Po vykrácení všech tlaků vydělíme rovnici součinem všech objemů ($V_1 . V_2 . V_3 . V_4$), a dostaneme tak :

$$(V_2 \cdot V_4)^{\kappa - 1} = (V_3 \cdot V_1)^{\kappa - 1}$$

Po odstranění exponentů můžeme stanovit poměr objemů :

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2}$$

který dosadíme do vztahu pro celkovou práci :

$$A = \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot ln\frac{V_2}{V_1} + \nu \cdot R \cdot T_2 \cdot ln\frac{V_4}{V_3} = \nu \cdot R \cdot ln\frac{V_2}{V_1} \cdot (T_1 - T_2)$$

c) Celkové teplo dodané plynu při Carnotově cyklu se skládá pouze ze dvou členů – dodaných tepel při izotermických dějích, neboť při adiabatických procesech k tepelným výměnám nedochází :

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Při výpočtu uplatníme rovnost tepla a práce při izotermickém ději a pak můžeme použít výsledek předchozí rovnice :

$$Q = Q_1 + Q_2 = A_1 + A_3 =$$
$$= \nu \cdot R \cdot T_1 \cdot ln \frac{V_2}{V_1} + \nu \cdot R \cdot T_2 \cdot ln \frac{V_4}{V_3} = \nu \cdot R \cdot ln \frac{V_2}{V_1} \cdot (T_1 - T_2) = A$$

Na konkrétním kruhovém termodynamickém ději jsme si tak ověřili obecně platný vztah pro kruhové cykly o rovnosti celkové vykonané práce a celkového přijatého tepla :
$$Q = A$$

V čem ale potom spočívá onen problém nedokonalé přeměny dodaného tepla na práci?

Práce vykonaná tepelným strojem se sice rovná celkovému přijatému teplu :

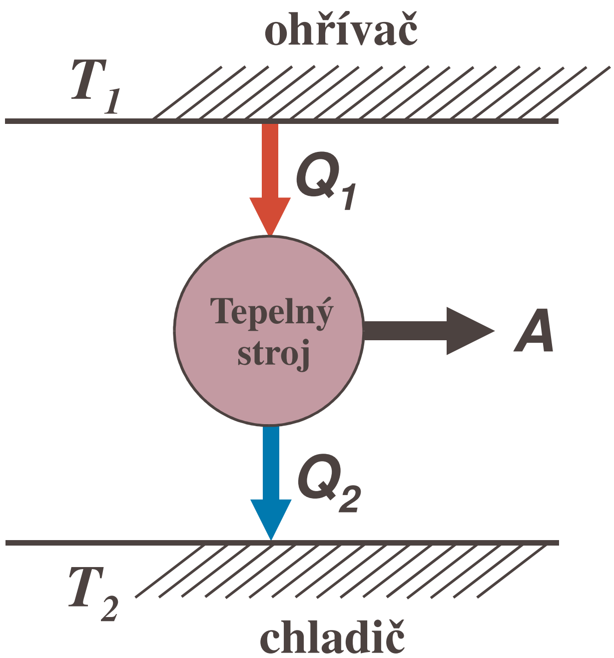
$$A = Q = Q_1 + Q_2$$

Ale toto celkové teplo je složeno ze dvou částí (Q_1, Q_2) a pouze prvně uvedené Q_1 je kladné, neboli je to teplo ***skutečně přijaté*** strojem z tepelného zdroje o teplotě T_1 – z ohřívače (kde se vytváří tepelná energie, např. spalováním paliva nebo přeměnou z jiné energie).

Druhá část celkového tepla Q_2 je záporná, tedy je to teplo ***odevzdané*** strojem do chladiče, pro využití strojem – přeměnu na práci – je to ovšem energie „ztracená“.
Napíšeme-li skutečně přijaté teplo na jednu stranu rovnice :

$$Q_1 = A - Q_2$$

vidíme názorně, jak stroj s touto dodanou energií naložil : přeměnil ji sice na mechanickou práci, ale určitou část dodaného tepla odevzdal „bez užitku“ do chladiče (viz obrázek).



Je zřejmé, že pro dokonalou přeměnu dodaného tepla na mechanickou práci by teplo vydané chladiči mělo být nulové, tj. tepelný stroj by měl pouze odebírat teplo z ohřívače a neměl by žádné teplo vydávat, nepotřeboval by pak spolupůsobení tělesa nižší teploty – chladiče (o této možnosti mluví první formulace 2.věty).

Ukázalo se však, že z podmínky uzavřenosti pracovního cyklu (+ samozřejmě energetický zisk) vyplývá nutnost, aby plyn vždy část dodaného tepla odevzdal do okolí (viz Clausiův integrál v další otázce) – přitom je nutné spolupůsobení tělesa nižší teploty, tj. chladiče.

Dokonalé přeměny tepla v práci by samozřejmě bylo dosaženo, kdyby teplo ztracené v chladiči mohlo samovolně přejít do ohřívače, a tak by se vrátilo do pracovního cyklu. To by ovšem vyžadovalo přechod tepla z tělesa chladnějšího na teplejší (a o tomto „nesmyslu“ hovoří další formulace 2.věty).

Tepelný stroj tedy nebude nikdy dokonale přeměňovat tepelnou energii na mechanickou práci a bude vždy vyžadovat existenci (minimálně) dvou spolupůsobících těles – ohřívače vyšší teploty a chladiče nižší teploty.

Teoretická účinnost tepelného stroje je pak definována v souladu s běžným chápáním jako poměr strojem vydávané energie – celkové mechanické práce (neuvažují se ztráty) – a energie stroji dodávané ve formě tepla :

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_1}}$$

účinnost tepelného stroje

Pro Carnotův cyklus dosadíme získané výrazy pro celkovou práci a teplo skutečně přijaté od ohřívače :

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{\nu \cdot R \cdot ln\frac{V_2}{V_1} \cdot (T_1 - T_2)}{\nu \cdot R \cdot T_1 \cdot ln\frac{V_2}{V_1}}$$

a dostaneme tak známý vztah :

$$\boxed{\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}}$$

účinnost vratného Carnotova cyklu

Je vidět, že účinnost je vždy menší než 100% a že je dána pouze teplotami ohřívače a chladiče a vůbec nezávisí na druhu plynu, ani na detailním průběhu Carnotova cyklu (na délce jeho jednotlivých větví).

Další rozbory ukazují (viz poznámku za Carnotovou větou a Clausiův integrál pro vratné cykly v příští kapitole), že vratný Carnotův cyklus má ze všech možných vratných kruhových procesů nejvyšší možnou účinnost.

Podmínka vratnosti je důležitá, nevratné děje v pracovních cyklech tepelných strojů vždy snižují jejich účinnost (stačí si představit nevratnou expanzi plynu, např. při velmi rychlém pohybu pístu - plyn nestačí expandovat a tlak na píst bude menší než v rovnovážném stavu a zmenší se tedy i vykonaná práce).

Přednosti Carnotova cyklu shrnuje ***Carnotova věta*** **:**

Účinnost všech vratných Carnotových cyklů (pracujících se stejnými teplotami) je stejná a závisí pouze na těchto teplotách :

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}}$$

A účinnost libovolného uzavřeného nevratného cyklu pracujícího s týmiž teplotami je vždy menší :

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}}$$

Pozn. : Carnotovu větu je možno ještě doplnit zhodnocením účinnosti libovolného uzavřeného vratného cyklu , který by pracoval také se stejnými dvěma teplotami, ale lišil by se od Carnotova cyklu – mohl by být vytvořen například kombinací libovolného počtu známých vratných (izo)dějů, nebo v principu jakoukoliv uzavřenou křivkou kvazistatického děje v p-V diagramu. (Jednoduchý příklad dostaneme, když dvě izotermy spojíme ne dvěma adiabatami, ale se dvěma izochorami.)

Základní odlišnost obecných uzavřených vratných cyklů od cyklu Carnotova tkví v tom, že zatímco realizace Carnotova kruhového děje vyžaduje pouze jeden ohřívač teploty T_1 a jeden chladič teploty T_2 , pak pro vytvoření libovolného jiného děje potřebujeme **další tepelné rezervoáry** – tedy další chladiče a ohřívače, nutné pro realizaci neadiabatických procesů - často speciálních vlastností (například požadujeme tepelné rezervoáry s pomalu se měnící teplotou, abychom zajistili izochorický kvazistatický ohřev a ochlazení plynu).
Pracovní teplota plynu je tedy obecně **spojitě proměnná veličina.** Tyto vratné obecné cykly vlastně nepracují „**se dvěma“ teplotami** T_1 a T_2 , ale „**mezi“** teplotou maximální (T_1) a minimální (T_2) .

Pro kvalifikovaný odhad pak stačí uvážit, že jakýkoliv další ohřívač znamená další teplo dodané plynu (při stejné vykonané práci, viz také T-S diagram v další kapitole) a tedy **nižší účinnost** cyklu. Přesný důkaz je možno provést pomocí Clausiova integrálu pro vratné cykly – opět v příští kapitole.

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 01/2005**

část. rev. 04/2007

Druhá věta termodynamiky a její matematické vyjádření

Připomeňme si nejprve znalosti z minulé kapitoly „Tepelné stroje a vznik 2.věty termodynamiky" :

Jakýkoliv termodynamický proces musí sice vždy splňovat zákon zachování energie – 1. větu termodynamiky - ale tento zákon se ukazuje pouze jako **nutná podmínka** existence (realizace) termodynamického procesu, **není však podmínkou postačující** - neboť lze najít velké množství procesů splňujících 1. větu, které nikdy reálně neproběhnou (zpětné děje nevratných procesů).
Proto vznikla 2.věta termodynamiky, která doplňuje 1.větu v tomto smyslu, že upřesňuje podmínky realizace termodynamických dějů.
Seznámili jsme se již také s několika variantami **slovní formulace** této 2.věty – od formulace „technické" (popisující schopnost tepelného stroje vykonávat práci přeměnou z dodaného tepla) až po formulaci velmi „teoretickou" (vzniklou později) :

1) ***Není možno sestrojit periodicky pracující stroj, který by nezpůsoboval nic jiného, než že by ochlazoval tepelnou lázeň a konal rovnocennou práci. (William Thomson = lord Kelvin – 1851, Max Planck)***
2) ***Není možno sestrojit perpetum mobile druhého druhu. (Friedrich Wilhelm Ostwald)***
3) ***Teplo nemůže samovolně přecházet ze studenějšího tělesa na teplejší. (Rudolf Julius Emanuel Clausius - 1850)***
4) ***V každém libovolném okolí libovolného počátečního stavu termicky homogenního systému existují stavy, k nimž se není možno libovolně přiblížit adiabatickou změnou stavových parametrů. (Constantin Carathéodory, řecký matematik - 1909)***

Při studiu Carnotova vratného cyklu jsme pak detailně poznali, že problém nedokonalé přeměny dodaného tepla na práci spočívá v tom, že práce vykonaná tepelným strojem se sice (podle 1. věty) rovná celkovému přijatému teplu :

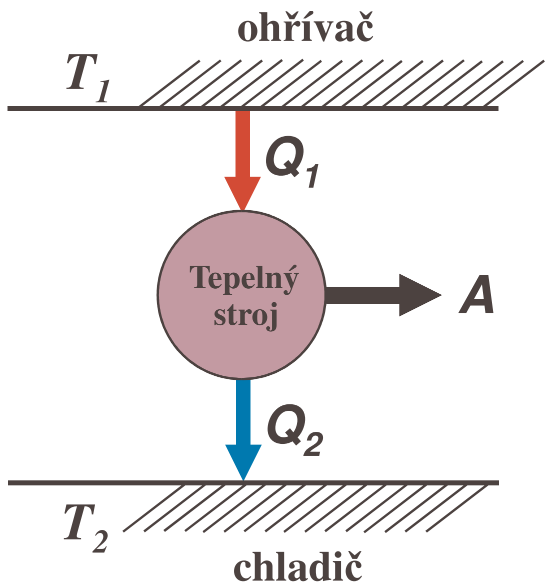
$$A = Q = Q_1 + Q_2$$

ale toto celkové teplo je složeno ze dvou částí a pouze prvně uvedené Q_1 je kladné, neboli je to teplo ***skutečně přijaté*** strojem z tepelného zdroje o teplotě T_1 – z ohřívače (kde se vytváří tepelná energie, např. spalováním paliva nebo přeměnou z jiné energie) a druhé teplo Q_2 je záporné - je to teplo ***odevzdané*** strojem do chladiče teploty T_2 - pro využití strojem, tedy přeměnu na práci - je to ovšem teplo „ztracené".

Napíšeme-li skutečně přijaté teplo na jednu stranu rovnice **:**

$$Q_1 = A - Q_2$$

vidíme názorně, jak stroj s dodanou energií naložil : přeměnil ji sice na mechanickou práci, ale určitou část tepla odevzdal „bez užitku“ do chladiče (viz obrázek).



Je zřejmé, že <u>pro dokonalou přeměnu</u> dodaného tepla na mechanickou práci by teplo vydané do chladiče mělo být nulové, tj. tepelný stroj by měl <u>pouze odebírat teplo</u> z ohřívače a neměl by žádné teplo vydávat, nepotřeboval by pak spolupůsobení tělesa nižší teploty – chladiče (o této nemožnosti mluví první formulace 2.věty).

<u>Dokonalé přeměny</u> tepla v práci by samozřejmě bylo také dosaženo, kdyby teplo ztracené v chladiči mohlo samovolně přejít do ohřívače, a tak by se vrátilo do pracovního cyklu. To by ovšem vyžadovalo přechod tepla z tělesa chladnějšího na teplejší (a o tomto „nesmyslu“ hovoří další formulace 2.věty).

Tepelný stroj tedy nebude nikdy dokonale přeměňovat tepelnou energii na mechanickou práci a bude vždy vyžadovat existenci (minimálně) dvou spolupůsobících těles – ohřívače vyšší teploty a chladiče nižší teploty.

<u>Teoretickou účinnost tepelného stroje</u> jsme pak definovali jako <u>poměr</u> strojem <u>vydávané</u> energie – celkové mechanické práce (neuvažují se ztráty) – a energie stroji <u>dodávané</u> ve formě tepla :

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_1}}$$

<u>účinnost tepelného stroje</u>

Podle Carnotovy věty pak platí :

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}}$$ ***účinnost vratného Carnotova cyklu***

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}}$$ ***účinnost nevratného cyklu***

Nyní pokročíme dále a ukážeme, že z podmínky uzavřenosti pracovního cyklu vyplývá nutnost, aby plyn vždy část dodaného tepla odevzdal do okolí – přitom je nutné spolupůsobení tělesa nižší teploty, tj. chladiče :

Provedeme následující matematické úpravy : použijeme vztah pro celkovou práci v Carnotově cyklu :

$$A = Q_1 + Q_2$$

a dosadíme jej do první rovnice v rámečku :

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Vynásobíme jmenovateli obou zlomků :

$$T_1 \cdot (Q_1 + Q_2) = Q_1 \cdot (T_1 - T_2)$$

$$T_1 \cdot Q_1 + T_1 \cdot Q_2 = Q_1 \cdot T_1 - Q_1 \cdot T_2$$

První členy obou stran se vyruší. Rovnici nakonec dělíme součinem obou teplot a oba vzniklé členy dáme na levou stranu :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Vznikl zajímavý vztah se dvěma členy, které se vztahují ke dvěma (izotermickým) procesům v Carnotově cyklu, ve kterých je plynem přijímáno teplo - a vždy se jedná o podíl vratně přijatého tepla a teploty, při které bylo teplo přijímáno (v technické termomechanice se nazývají **redukovaná tepla**). Teploty jsou samozřejmě vždy kladné, ale druhé teplo je záporné, proto je dosaženo nulové pravé strany.

Pozn. : K úpravě druhého výchozího vztahu – nerovnosti pro nevratné cykly – lze použít stejný matematický postup a vznikla by opět nerovnost :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$$

Získaný vztah nyní **zobecníme** představou nějakého **vratného pracovního cyklu, ve kterém by se plynu předávalo teplo ve více izotermických procesech** spojených adiabatami (takový myšlený stroj by měl více ohřívačů a chladičů) - pak by zřejmě platilo (můžeme použít písmeno Δ na označení jednotlivých částí celkového dodaného tepla) :

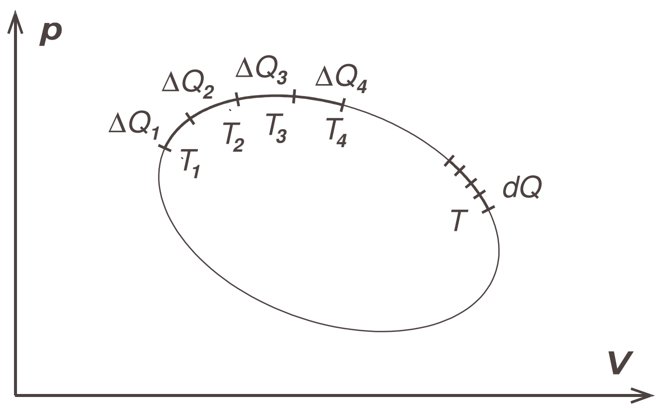
$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} + \frac{\Delta Q_3}{T_3} + \ldots = 0$$

Zapsáno stručněji pomocí matematické sumy :

$$\sum \frac{\Delta Q_k}{T_k} = 0$$

A tento tvar nám dobře pomůže při závěrečné úvaze :

V **nejobecnějším případě** by **libovolný vratný** pracovní cyklus neměl žádné izotermické části a teplo by se plynu dodávalo spojitě při proměnlivé teplotě (viz obr.).



Pak použijeme představu, že uzavřenou křivku pracovního procesu rozdělíme na velký počet (N) malých úseků , na kterých můžeme považovat teplotu plynu za přibližně konstantní a pro vratně dodaná tepla na těchto úsecích bude zřejmě opět platit analogická rovnice :

$$\sum \frac{\Delta Q_k}{T_k} = 0$$

(Pro exaktní důkaz tohoto tvrzení se protější izotermické části formálně propojí adiabatami do Carnotova cyklu - z celé obecné křivky tak vznikne *N/2* Carnotových cyklů a rovnice pro jejich dodaná tepla se sečtou všechny dohromady).

Vratně dodaná tepla na malých úsecích jsou také velmi malá - v limitě nekonečně malých úseků jsou pak tato tepla diferenciálně malé - a suma přejde na integrál (po uzavřené integrační cestě) :

$$\boxed{\oint \frac{dQ}{T} = 0}$$

<u>Clausiův integrál pro uzavřené vratné cykly</u>

<u>*Pozn . :*</u> I když jsme v našich úvahách vyšli z vratného Carnotova cyklu, dospěli jsme k obecnému vztahu platnému pro <u>libovolný uzavřený vratný cyklus</u>. Vratný Carnotův cyklus se od jiných vratných uzavřených cyklů sice odlišuje svojí vyšší účinností, ale hodnota Clausiova integrálu je pro ně pro všechny stejná - rovná nule.

V případě <u>nevratných</u> cyklů zůstává ovšem stále v platnosti výchozí nerovnost a vznikne proto také nerovnice :

$$\boxed{\oint \frac{dQ}{T} < 0}$$

<u>Clausiův integrál pro nevratné cykly</u>

<u>Spojíme-li oba vztahy dohromady</u>, dostaneme <u>obecnou charakteristiku</u> jakéhokoliv pracovního uzavřeného děje, která se považuje za matematický tvar 2.věty termodynamiky, :

$$\boxed{\oint \frac{dQ}{T} \leq 0}$$

<u>matematické vyjádření 2.věty termodynamiky</u>

Tento vztah totiž exaktně zdůvodňuje nemožnost dokonalé přeměny dodaného tepla na práci :

a) Protože absolutní teplota plynu je vždy **kladná**, pak pro vytvoření **nulové výsledné hodnoty** integrálu **nemohou být všechna tepla dQ kladná** (tj. skutečně přijatá), ale **musí vždy existovat také tepla dQ záporná** - tedy plynem bez pracovního užitku odevzdaná do okolí (do chladiče).

b) V případě **záporné hodnoty** Clausiova integrálu (tedy pro nevratné cykly) pak **záporná tepla** dQ mají **vyšší podíl** – plyn tedy během cyklu **odevzdá více tepla**, vykonaná <u>práce se proto zmenší</u>, a tím se **zmenší i účinnost** tohoto nevratného pracovního cyklu (Carnotova věta).

Plynu dodané teplo se tedy nikdy nemůže stoprocentně přeměnit na práci – perpetum mobile 2. druhu neexistuje.

Pomocí Clausiova integrálu také lehce dokážeme, že vratný Carnotův cyklus má ze všech možných vratných uzavřených cyklů **nejvyšší účinnost** :

Předpokládejme tedy nějaký obecný vratný uzavřený proces probíhající **mezi teplotami T_1 a T_2** - tzn. jehož pracovní teplota se může libovolně spojitě měnit mezi maximální hodnotou T_1 a minimální hodnotou T_2 .

Celkové teplo **skutečně předané plynu** (tj. kladné hodnoty) můžeme vypočítat integrací po té části (částech) cyklu – označíme ji indexem ***1*** – na které je $dQ > 0$:

$$Q_1 = \int_1 dQ$$

Celkové teplo, které plyn **odevzdá** do okolí, pak bude zase vypočítáno integrálem po (zbylé) části cyklu – označíme ji indexem ***2*** – na které je $dQ < 0$:

$$Q_2 = \int_2 dQ$$

Potom rozdělíme Clausiův integrál (rovnající se nule) také na dva integrály po uvedených částech cyklu ***1*** a ***2*** :

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_1 \frac{dQ}{T} + \int_2 \frac{dQ}{T} = 0$$

Tedy pro **všechny vratné uzavřené cykly** platí :

$$\int_1 \frac{dQ}{T} + \int_2 \frac{dQ}{T} = 0$$

Diferenciální tepla v integrálech pak můžeme nahradit celkovými teply podle následující úvahy : Protože T_1 je maximální možná teplota, při které se v cyklu dodává plynu teplo, musí platit nerovnost :

$$\int_1 \frac{dQ}{T} \geq \frac{Q_1}{T_1}$$

A analogicky - protože T_2 je minimální možná teplota, při které v cyklu plyn odevzdává teplo do okolí, bude platit nerovnost (jsou to záporné výrazy) :

$$\int_2 \frac{dQ}{T} \geq \frac{Q_2}{T_2}$$

Proto po dosazení těchto vztahů dostaneme :

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

A nyní si už jen představme stejné úpravy, jaké jsme dělali na začátku této kapitoly, ale v obráceném pořadí – výsledkem bude vztah pro účinnost :

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}}$$

Dokázali jsme tedy jednoznačně, že :

Carnotův vratný cyklus má ze všech možných vratných uzavřených cyklů nejvyšší možnou účinnost .

V následující kapitole pak bude ukázáno, že s pomocí nové stavové veličiny entropie je možno formulovat onu dodatečnou podmínku realizace termodynamického děje – tedy 2. větu termodynamiky – bez toho, aniž bychom ji museli spojovat s pracovním cyklem tepelných strojů :

Nevratné přirozené tepelné procesy probíhající v **izolovaných** soustavách (přenos tepla z látek teplejších na látky chladnější, rozpínání plynu dok míst nižšího tlaku,…). jsou totiž spojeny s neustálým **růstem entropie -** a neexistující zpětné směry těchto dějů by tedy musel charakterizovat její pokles.

Růst nějaké veličiny lze jednoduše matematicky lze vyjádřit nerovností :

$$\boxed{dS > 0}$$

A proto můžeme konstatovat :

Princip růstu entropie v izolované soustavě je nejobecnější matematickou formulací 2.věty termodynamiky.

Uvážíme-li ještě, že při **vratných** adiabatických procesech se entropie nemění (přírůstek entropie je nulový), pak **libovolné** procesy v izolované soustavě - vratné i nevratné - jsou charakterizovány vztahem :

$$\boxed{dS \geq 0}$$

princip růstu entropie v izolované soustavě, matematický tvar 2.věty

V izolované soustavě tedy probíhají pouze takové procesy, při nichž entropie soustavy vzrůstá nebo zůstává nezměněna.

Druhá možnost (konstantní entropie) se vztahuje k vratným procesům, které – jak víme – souvisejí s rovnovážnými stavy termodynamické soustavy. Připomeňme si ještě znalosti o nevratných přirozených procesech v izolované soustavě – že tyto procesy přivádějí soustavu právě do rovnovážného stavu.

Je tedy zřejmé, že entropie izolované soustavy **vzrůstá** za současného přibližování k rovnovážnému stavu a při jeho dosažení se už dále nemění, což znamená, že **dosáhla svého maxima**.
Dostali jsme se tak k dalšímu důležitému poznatku :

V termodynamické rovnováze je entropie izolované soustavy maximální.

Princip růstu entropie je nejjednodušším matematickým vyjádřením 2.věty termodynamiky, neposkytuje však bližší vysvětlení, **proč vlastně tento zákon platí**. Teprve Ludwig Boltzmann na základě **kinetické teorie** 2.větu objasnil a ukázal, že je vlastně **statistickým zákonem** - to znamená, že platí jen pro soubory s velmi mnoha částicemi, na které lze aplikovat matematickou statistiku - **na rozdíl od 1.věty termodynamiky** - která je obecným, **univerzálním zákonem** .

Na čtyřčásticovém plynu budeme v příští kapitole demonstrovat, že stav termodynamické rovnováhy izolované soustavy je charakterizován nejen maximální entropií, ale i nejvyšší možnou pravděpodobností a že tedy entropie je zřejmě rostoucí funkcí pravděpodobnosti stavu soustavy.
Boltzmann také jako první (1877) určil tvar této funkce :

$\boxed{S = k \cdot \ln w}$ $\quad (+\,konst.)$ *vztah entropie a pravděpodobnosti*

(V tomto vztahu je použita tzv. termodynamická pravděpodobnost w - počet mikrostavů daného stavu soustavy, k je Boltzmannova konstanta).
Uvážíme-li ještě, že **nerovnovážný stav** uzavřené soustavy znamená také **větší uspořádanost** („pořádek“) soustavy, pak přechod soustavy k **rovnovážnému** stavu je spojem se **ztrátou této uspořádanosti** (v soustavě vznikne „nepořádek“).

Celkem tedy platí :

Směr nevratných procesů je odůvodněn vývojem termodynamické soustavy od méně pravděpodobných stavů ke stavům pravděpodobnějším (od uspořádanějších stavů ke stavům méně uspořádaným).
Zpětný (opačný) směr těchto procesů není principiálně nemožný, je však zanedbatelně málo pravděpodobný.

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 05/2007**

Entropie

Při pohledu na Clausiův integrál pro vratné cykly :

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

si dříve či později jistě uvědomíme, že nulová hodnota integrálu nějaké veličiny při kruhovém termodynamickém procesu je základním znakem toho, že se jedná o stavovou veličinu. Vzpomeňme na vnitřní energii U, pro jejíž přírůstek dU platilo :

$$\oint dU = 0$$

Je tedy možno definovat novou stavovou veličinu – a zavedl ji právě **Clausius** roku 1850 a nazval ji **entropie** S (z řečtiny „udávat směr") – za znakem integrálu je tedy její přírůstek :

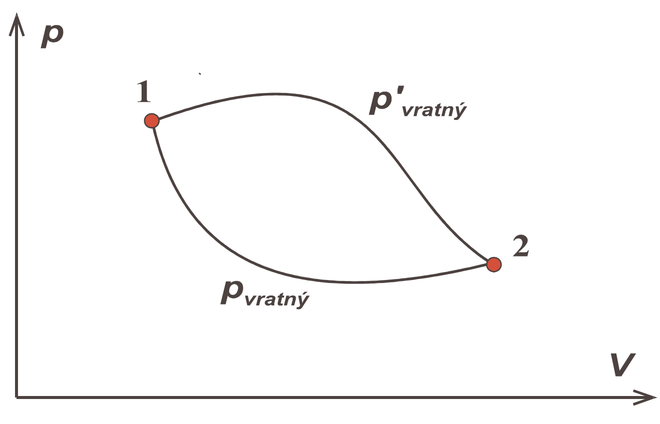
$$\boxed{dS = \frac{dQ}{T}}$$

definice entropie

Pozor !! Není tedy definována velikost entropie v nějakém stavu plynu, ale její **přírůstek** při nepatrné, diferenciální **vratné** změně stavu jako podíl **vratně přijatého tepla** a **teploty** plynu (kterou lze samozřejmě při této nepatrné změně stavu považovat vždy za konstantní).

Podle našich dřívějších poznatků o stavových veličinách můžeme dále konstatovat, že celková ***změna entropie*** plynu při nějakém procesu (vratném) ***nezávisí na křivce procesu***, ale pouze ***na počátečním a koncovém stavu*** a je dána rozdílem entropií v těchto stavech :

$$\Delta S = \underset{(p_{vr.})}{\int_1^2} dS = \underset{(p'_{vr.})}{\int_1^2} dS = S_2 - S_1$$



Dále pak velmi malý přírůstek entropie jako stavové veličiny musí být **úplným diferenciálem** (stavové funkce S). Jak vidíte z definice entropie, tento úplný diferenciál je vlastně vytvořen z diferenciálu neúplného (dQ) pouhým vynásobením faktorem $1/T$.

Jestliže budeme chtít vypočítat změnu entropie přímo z definice, musíme především vyjádřit diferenciální dodané teplo, například pomocí první termodynamické věty :

$$dQ = dU + dA$$

Další použití této rovnice je velmi snadné u ideálního plynu, neboť v případě vratných změn můžeme jednoduše dosadit známé vztahy :

$$dU = \nu \cdot C_V \cdot dT \qquad\qquad dA = p \cdot dV$$

A dostaneme:

$$\boxed{dQ = \nu \cdot C_V \cdot dT + p \cdot dV}$$

Za tlak ve druhém členu lze dosadit ze stavové rovnice ideálního plynu, která také platí v případě vratných procesů :

$$\boxed{dQ = \nu \cdot C_V \cdot dT + \frac{\nu \cdot R \cdot T \cdot dV}{V}}$$

Pak nekonečně malá změna entropie bude :

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \cdot \left(\nu \cdot C_V \cdot dT + \frac{\nu \cdot R \cdot T \cdot dV}{V} \right) = \frac{\nu \cdot C_V \cdot dT}{T} + \frac{\nu \cdot R \cdot dV}{V}$$

A změna entropie při nějakém vratném termodynamickém procesu ze stavu 1 do stavu 2 :

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \nu \cdot \int_1^2 \frac{C_V \cdot dT}{T} + \nu \cdot R \cdot \int_1^2 \frac{dV}{V}$$

Druhý integrál lze ihned provést :

$$\Delta S = \nu \cdot \int_1^2 \frac{C_V \cdot dT}{T} + \nu \cdot R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Pokud molární tepelná kapacita nezávisí na teplotě, lze vypočítat i první integrál :

$$\boxed{\Delta S = \nu \cdot \left(C_V \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \right)}$$

změna entropie (při vratných procesech ideál. plynu)

Změna entropie je tedy přímo úměrná množství plynu. Výsledek se ještě výrazně zjednoduší při procesu izochorickém, případně izotermickém (jeden ze členů bude nulový).

Stejně jako ostatní stavové veličiny, je entropie také vhodná k popisu stavů termodynamických soustav. V technické termodynamice se často používá k výpočtu vratně dodaného tepla, neboť z její definice plyne pro diferenciální dodané teplo :

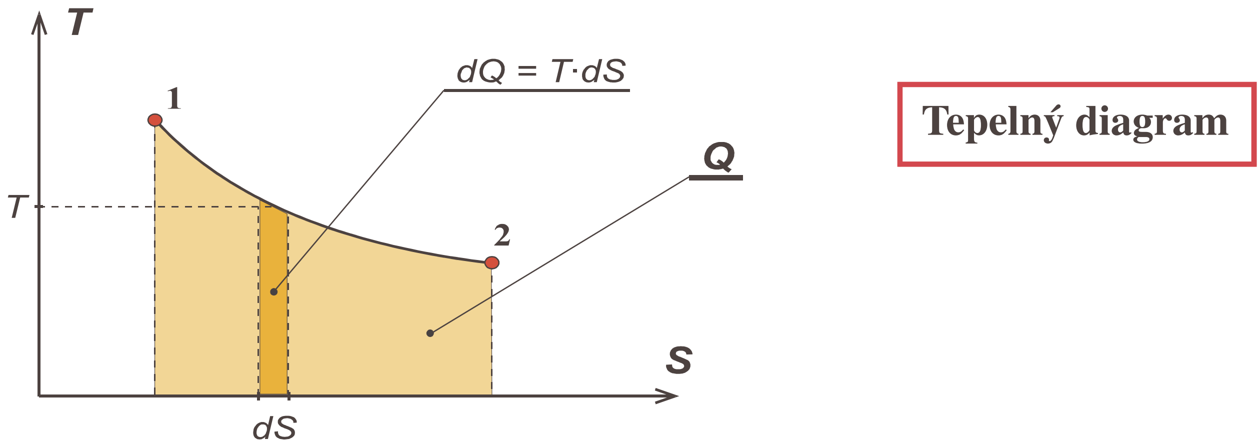
$$dQ \;=\; T \cdot dS$$

Celkové teplo dodané při nějakém vratném termodynamickém ději ze stavu 1 do stavu 2 je pak samozřejmě integrálem z tohoto výrazu :

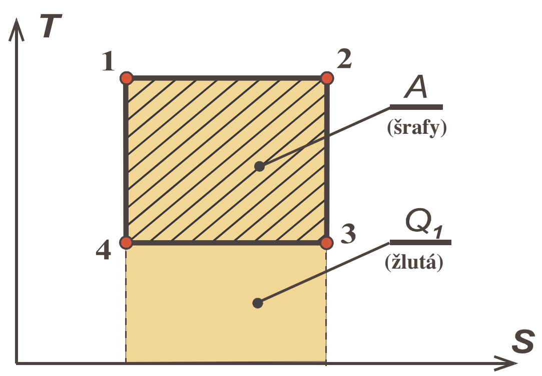
$$\boxed{Q \;=\; \int_{\substack{1\\vr.}}^{2} dQ \;=\; \int_{\substack{1\\vr.}}^{2} T \cdot dS}$$

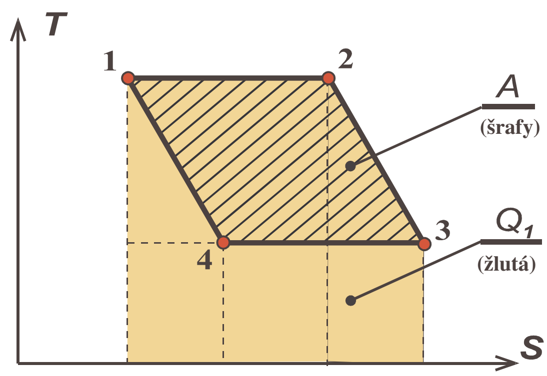
<u>dodané teplo vyjádřené pomocí entropie</u>

Jestliže stavy plynu a křivku termodynamického děje zakreslíme v T-S diagramu - tzv. ***<u>tepelný diagram</u>*** , pak je toto teplo graficky znázorněno **plochou pod křivkou** daného procesu (viz obr.)



Nejjednodušším možným způsobem – úsečkami rovnoběžnými s osami – je v tepelném diagramu znázorněn vratný **<u>Carnotův kruhový cyklus</u>**, který se stává ze dvou dějů **izotermických** a dvou dějů adiabatických – tj. **izoentropických**. Protože dodaná tepla nám ukazují plochy pod křivkami, vidíme jasně jejich nulovost u izoentropických dějů znázorněných svislými úsečkami a je možno také dobře znázornit celkovou **vykonanou práci** , která je rovna součtu obou tepel (druhé teplo je záporné !!) dodaných při izotermických dějích (viz další obrázek vlevo) :





Vedlejší, pravý obrázek je pak možno považovat za grafickou ilustraci tvrzení o maximální účinnosti vratného Carnotova cyklu ze všech možných vratných kruhových cyklů pracujících mezi stejnými teplotami T_1 a T_2 (které bylo matematicky dokázáno v poznámce před začátkem odstavce o entropii) :

Je vidět, že postačí i jen částečná změna Carnotova cyklu – nahrazení adiabat jinými ději – a jejich křivky pak už nebudou svislé, ale šikmé – a tím se **zvětší** celkové dodané teplo při **stejné** vykonané práci - tzn. **sníží se** účinnost cyklu.

Pozn. : Obecně nižší účinnost nevratného cyklu oproti cyklu vratnému jsme již vysvětlili pomocí Clausiova integrálu, který nám také obecně objasnil nemožnost dokonalé přeměny tepla na práci.

Dále je možno veličinu entropie využít tak, že do 1. věty termodynamiky, napsané pro **přírůstek** vnitřní energie :

$$\boxed{dU = dQ - dA}$$

přírůstek vnitřní energie (obecně)

dosadíme v případě **vratných dějů** dosadit výše uvedený vztah pro dodané teplo (současně se vztahem pro vykonanou prác):

$$dQ = T \cdot dS \qquad\qquad dA = p \cdot dV$$

A dostaneme rovnici, která se v učebnicích často označuje jako „spojená formulace první a druhé věty termodynamiky" :

$$\boxed{dU = T \cdot dS - p \cdot dV}$$

Spojená formulace první a druhé věty termodynamiky

Tento vztah vlastně vyjadřuje přírůstek vnitřní energie - jako diferenciálu funkce dvou proměnných - entropie a objemu :

$$\boxed{U = U(S,V)}$$

Matematické vyjádření diferenciálu této funkce je ovšem obecně :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V \cdot dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S \cdot dV$$

Porovnáním obou diferenciálů dostaneme zajímavá vyjádření základních stavových veličin - a tyto vztahy dokazují **význam entropie** jako stavové veličiny a také **důležitost vnitřní energie** jako jednoho z tzv. ***termodynamických potenciálů*** (je jím i entropie, více viz další kapitoly) :

$$\boxed{T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V} \qquad \boxed{p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S}$$

Význam nové stavové veličiny **entropie** je však ještě **větší** – pomocí entropie lze obecně zformulovat onu dodatečnou podmínku, kterou (kromě platnosti 1.věty) musí splňovat termodynamický proces, a matematicky **vyjádřit nevratnost** tepelných procesů :

Víme, že v tepelně izolovaných soustavách probíhají adiabatické děje charakterizované nulovou tepelnou výměnou :

$$dQ = 0$$

Lehce vyřešíme ***vratný adiabatický děj***, jehož přijaté teplo přímo určuje přírůstek entropie, který je zde ovšem nulový :

$$dS = \frac{dQ}{T} = 0$$

Samozřejmě je i nulová celková změna entropie při vratném adiabatickém procesu ze stavu 1 do stavu 2 :

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = 0$$

a tedy dostáváme :

$$S_1 = S_2$$

Při ***vratném adiabatickém procesu*** zůstává entropie konstantní, je to ***děj izoentropický*** **:**

$$\boxed{S = konst.}$$

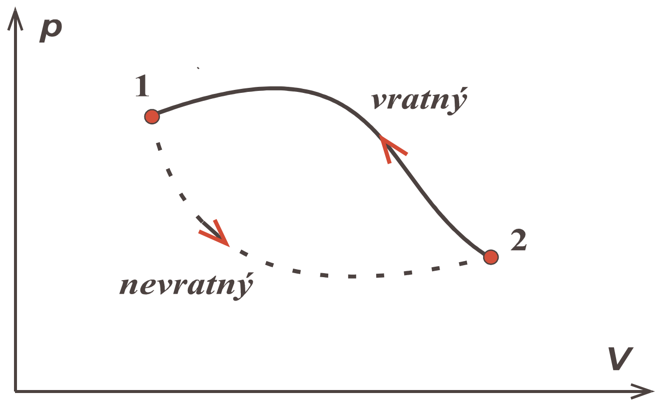
Nevratný adiabatický děj je ovšem poněkud složitější problém. I v tomto případě je samozřejmě přijaté teplo plynem nulové :

$$dQ = 0$$

Ale to nám o entropii nic neříká – přírůstek entropie lze stanovit pouze pomocí vratně přijatého tepla.

Určíme nejprve **změnu entropie nevratného děje** obecně, pro libovolný proces :

Představme si, že se z počátečního (libovolného) stavu ***1*** dostaneme nějakým **nevratným** procesem do konečného stavu ***2*** a z tohoto stavu přejdeme zpět do stavu ***1*** procesem **vratným.**



Kruhový děj, který oba procesy dohromady vytvářejí, je ovšem celkově nevratný, Clausiův integrál je proto záporný :

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0$$

Napišme levou stranu jako součet integrálů přes obě části uzavřeného cyklu :

$$\underset{(\,nevr.)}{\int_{1}^{2}} \frac{dQ}{T} + \underset{(\,vr.)}{\int_{2}^{1}} \frac{dQ}{T} < 0$$

Druhý integrál je po vratné cestě - jeho hodnota je proto rovna celkovému přírůstku entropie, tj. rozdílu entropií v koncovém a počátečním stavu :

$$\underset{(\,vr.)}{\int_{2}^{1}} \frac{dQ}{T} = \underset{(\,vr.)}{\int_{2}^{1}} dS = S_1 - S_2$$

Po jeho dosazení a převedení na druhou stranu rovnice dostáváme ***obecný vztah pro libovolný nevratný děj*** mezi dvěma (rovnovážnými) stavy plynu (ze stavu 1 do stavu 2) :

$$\boxed{S_2 - S_1 = \Delta S > \underset{(\,nevr.)}{\int_{1}^{2}} \frac{dQ}{T}}$$

změna entropie při nevratném ději

Rozdíl obou stran nerovnice, tj. rozdíl přírůstku entropie a integrálu z podílu nevratně přijatého tepla a teploty, je možno považovat za jakousi **„míru nevratnosti“ termodynamického děje** (pro vratný proces by tento rozdíl byl ovšem nulový).

Uvážíme-li nyní speciální případ nevratného děje v tepelně izolované soustavě - tj. ***nevratný adiabatický děj*** , kdy je tepelná výměna nulová :

$$dQ = 0$$

Pak bude integrál na pravé straně nulový a pro změnu entropie dostáváme :

$$\Delta S > 0$$

Nevratný adiabatický děj již tedy není izoentropický, ale probíhá za neustálého růstu entropie. Pro (diferenciálně) malou nevratnou adiabatickou změnu lze tedy analogicky psát :

$$\boxed{dS > 0}$$

Jestliže si uvědomíme, že v izolovaných soustavách jsou probíhající nevratné přirozené tepelné procesy samozřejmě adiabatické, pak jsme vlastně objevili matematické kritérium, které dobře charakterizuje možný ***směr těchto procesů*** (směr přenosu tepla – z látek teplejších na látky chladnější, směr rozpínání plynu,…).

Opačné (zpětné) směry přirozených procesů možné nejsou a jejich neexistence je zřejmě spojena s nemožností poklesu entropie v izolované termodynamické soustavě. Růst entropie (v izolované soustavě) je proto možno považovat za ono hledané další kritérium realizace termodynamického procesu, které v maximální obecnosti (už bez zjevné souvislosti s tepelnými stroji) doplňuje zákon zachování energie (1.věta).

Princip růstu entropie (v izolované soustavě) je nejobecnější matematickou formulací 2.věty termodynamiky.

Uvážíme-li ještě, že při vratných adiabatických procesech se entropie nemění (přírůstek entropie je nulový), pak libovolné procesy v izolované soustavě jsou charakterizovány vztahem :

$$\boxed{dS \geq 0}$$ ***princip růstu entropie v izolované soustavě, matematický tvar 2.věty termodynamiky***

V izolované soustavě mohou tedy probíhat pouze takové procesy, při nichž entropie soustavy vzrůstá nebo zůstává nezměněna.
Druhá možnost (konstantní entropie) se vztahuje k vratným procesům, které – jak víme – souvisejí s rovnovážnými stavy termodynamické soustavy.
Připomeňme si také další znalosti o nevratných přirozených procesech v izolované soustavě – že tyto procesy přivádějí soustavu právě do rovnovážného stavu.

Entropie izolované soustavy tedy vzrůstá za současného přibližování k rovnovážnému stavu a při jeho dosažení se už dále nemění, což znamená, že **dosáhla svého maxima**.

Dostali jsme se tak k dalšímu důležitému poznatku :

V termodynamické rovnováze je entropie izolované soustavy maximální.

Poznámka: Mohlo by se zdát, že obecná platnost těchto formulací je značně omezena podmínkou izolace soustavy. Při fyzikálních analýzách světa kolem nás i v technických aplikacích však ale téměř vždy (aniž si to třeba i uvědomujeme) používáme izolované (uzavřené, osamocené) soustavy tím, že zanedbáváme vliv některých okolních těles (protože nedokážeme sledovat působení nekonečného počtu vnějších objektů). A pokud studovaná termodynamická soustava ještě není izolovaná, vždy ji můžeme zahrnout jako podmnožinu do nějaké větší soustavy skutečně izolované (např. pracovní plynová náplň tepelného stroje samozřejmě není uzavřená, ale spolu s ohřívačem, chladičem a „příjemcem práce“ vytvoří rozumnou izolovanou soustavu).

Entropie a pravděpodobnost

Princip růstu entropie je matematickým vyjádřením 2.věty termodynamiky, neposkytuje však bližší vysvětlení, **proč vlastně tento zákon platí**. Teprve Boltzmann na základě **kinetické teorie** objasnil 2.větu termodynamiky a ukázal, že je vlastně **statistickým zákonem** - to znamená, že platí jen pro soubory s velmi mnoha prvky, na které lze aplikovat matematickou statistiku - **na rozdíl od 1.věty termodynamiky**, která je obecným, **univerzálním zákonem** .

Podle kinetické teorie je termodynamická soustava (plyn) skutečně souborem obrovského počtu nepatrných částic – molekul (neuspořádaně se pohybujících různými směry i rychlostmi).
Takzvané **stavové veličiny** (teplota, tlak, vnitřní energie, …) ovšem nepopisují vlastnosti (stavy) jednotlivých **mikroskopických** částic (tj. jejich polohy a rychlosti), ale popisují **stav soustavy** jako celku – tzv. **makrostav** soustavy.
Tyto - **makroskopické** - stavové veličiny jsou pak (někdy) jednoznačně spojeny se statistickými **středními** hodnotami dané soustavy částic (jak jsme viděli v minulých kapitolách, pomocí střední kvadratické rychlosti je možno stanovit vnitřní energii soustavy, tlak i teplotu, …, ovšem jen ve stavu termodynamické rovnováhy).

V jakémkoliv **makrostavu** soustavy má ovšem každá částice nějaký svůj stav – je možno říci **mikrostav** (polohu a rychlost) - a soubor mikrostavů všech částic (polohy a rychlosti všech částic) vytváří **mikrostav** soustavy.
Když bychom tedy chtěli znázornit mikrostav soustavy, museli bychom nakreslit polohy všech částic soustavy (a ještě ke každé částici připojit její rychlost).

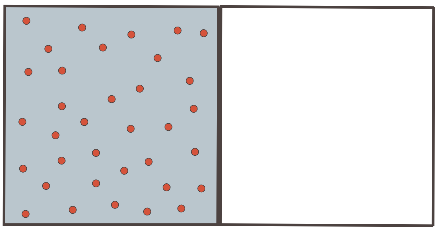
> Pozn. : Při teoretickém popisu stavů hmotných částic se namísto rychlosti používá veličina hybnost (tím se do výpočtů zahrne i hmotnost částice) – stav jedné částice pak bude určen její polohou a hybností – tedy dvěma vektory :
>
> $$\vec{r} = (x, y, z) \quad \text{a} \quad \vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$$
>
> nebo jinak řečeno šesti skalárními veličinami – souřadnicemi těchto vektorů.
> Proto se zavádí formální šestirozměrný **fázový prostor** Φ s kartézskými osami x, y, z, p_x, p_y, p_z , neboť v tomto prostoru je pak stav jedné částice znázorněn také pouze jedním bodem :
>
> $$(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$$
>
> Mikrostav soustavy N částic je tedy ve fázovém prostoru znázorněn soustavou také N bodů.
> Různé **makrostavy** soustavy – kterým odpovídají např. různé energie soustavy – jsou pak spojeny s různým rozložením (rozdělením) těchto bodů ve fázovém prostoru, které lze popsat jejich hustotou (koncentrací) – tzv. **rozdělovací funkcí** f :
>
> $$f = \frac{dN}{d\phi}$$
>
> kde dN je počet bodů – obrazů stavů částic – v elementu fázového prostoru (kartézský element, obecně by mohl být i jiný) :
>
> $$d\phi = dx \cdot dy \cdot dz \cdot dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$$
>
> Stav termodynamické rovnováhy pak popisuje Boltzmannova rozdělovací funkce :
>
> $$f = konst \cdot e^{-\frac{energie\ částice}{k \cdot T}}$$
>
> V případě ideálního plynu pak lze vhodnou volbou elementu fázového prostoru a integrací podle prostorových souřadnic dojít až ke známé Maxwellově rozdělovací funkci, kterou jsme použili v kapitole „Vnitřní energie a teplota podle kinetické teorie" :

$$f(v) = \frac{dN}{dv} = 4\pi N \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot v$$

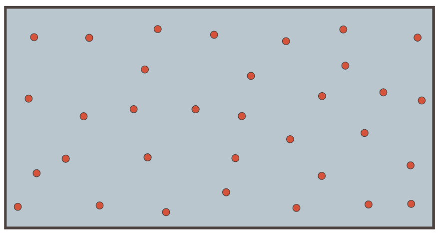
Každý mikrostav soustavy – tj. rozložení částic v prostoru (ve smyslu poznámky přesně vzato ve fázovém prostoru) – tedy jistě náleží k nějakému makrostavu soustavy.
Představme si nyní, že pozměníme konkrétní mikrostav tím způsobem, že vzájemně zaměníme libovolné dvě částice. Změní se tím makrostav soustavy – tj. její energie, tlak, …atd. ?
Určitě ne !
Všechny částice (molekuly daného plynu) jsou přece stejné, takže nezáleží na tom, která konkrétní částice je na daném místě (a má danou rychlost), ale je důležité, zda tam nějaká molekula vůbec je.

Jeden makrostav soustavy tedy může být realizován více různými mikrostavy.

Abychom stejně jako Boltzmann objevili onen zásadní statistický zákon, musíme prozkoumat mikro- a makrostavy termodynamické soustavy při nějakém nevratném procesu, kdy dochází k růstu entropie soustavy.
Kvůli nesmírnému počtu částic (molekul) nemáme ovšem naprosto žádnou šanci znázornit mikrostavy i jen například jednoho gramu skutečné látky (plynu), jedinou možností je tedy pracovat se soustavou o malém počtu částic a pak se pokusit o teoretické zobecnění.
Podíváme se tedy tímto způsobem, co se děje s termodynamickou soustavou (plynem) při jednom z přírodních nevratných procesů – při **expanzi plynu** do vakua.
Nejprve podrobně popíšeme tento proces :
Nechť máme tzv. **izolovanou soustavu** - pevnou, uzavřenou a tepelně izolovanou nádobu, která je rozdělená přepážkou na dvě (stejné) části (viz obr.) :



počáteční stav - před expanzí



konečný stav - po expanzi

V počátečním stavu je levá část naplněna plynem o tlaku p, který je podle stavové rovnice určen počtem částic plynu (koncentrací), pravá část je prázdná (nulový tlak, vakuum).
Pak odstraníme přepážku a plyn bude proudit z levé části nádoby do části pravé - tlak tedy bude v levé části klesat a v pravé části bude stoupat – takto se realizuje expanze plynu - **nerovnovážný termodynamický proces**
Po určité době se ovšem tlaky vlevo o vpravo vyrovnají, proudění plynu ustane a vznikne **konečný stav termodynamické rovnováhy**. charakterizovaný konstantním tlakem (v případě stejných částí nádoby to bude poloviční tlak – $p/2$),
Tento proces je zaručeně nevratný – plyn se nikdy sám **nevrátí zpět** do levé části nádoby ! (nelze předpokládat žádný vnější zásah – je to přece izolovaná soustava).

Nyní se pokusíme určit mikro- a makrostavy, jestliže by plyn byl tvořen soustavou malého počtu – například 4 (čtyř) částic (molekul) – označíme je **a, b, c, d.**

V počátečním (makro)stavu jsou všechny částice vlevo, vpravo není žádná , tomu odpovídá jediný mikrostav :

1. makrostav (4 částice vlevo, 0 vpravo) počet mikrostavů : $w = 1$

a, b, c, d	

Po otevření přepážky mohou molekuly přecházet vpravo - vzniká další makrostav :

2. makrostav (3 částice vlevo, 1 vpravo) počet mikrostavů : $w = 4$

b, c, d	**a**
a, c, d	**b**
a, b, d	**c**
a, b, c	**d**

Stejný počet molekul vlevo i vpravo pak odpovídá konečnému rovnovážnému stavu :

3. makrostav (2 částice vlevo, 2 vpravo) počet mikrostavů : $w = 6$

a, b	**c, d**
a, c	**b, d**
a, d	**b, c**
b, c	**a, d**
b, d	**a, c**
c, d	**a, b**

Neuspořádaný pohyb molekul však nelze zastavit, může proto vzniknou další stav, kdy se plyn vlastně částečně přesouvá do pravé části :

4. makrostav (1 částice vlevo, 3 vpravo) počet mikrostavů : $w = 4$

a	**b, c, d**
b	**a, c, d**
c	**a, b, d**
d	**a, b, c**

A v principu se všechny molekuly mohou přemístit do pravé části soustavy :

5. makrostav (0 částice vlevo, 4 vpravo) počet mikrostavů : $w = 1$

	a, b, c, d

Neuspořádaný pohyb ovšem stále pokračuje – a tak se opakovaně realizují výše uvedené stavy, plyn se tedy může přemístit také do levé části nádoby – tím se ovšem dostává zpět do počátečního stavu, jinak řečeno samovolně proběhne **zpětný proces** – ten, o kterém jsme tvrdili, že je z důvodů nevratnosti expanze absolutně vyloučený !!! **Objevili jsme tedy vratnou expanzi plynu !!**

A stejně vratný může zřejmě být i přechod tepla z tělesa teplejšího na těleso chladnější – teplo bude přecházet i obráceně, z tělesa chladného na těleso teplé - a další přirozené, tzv. nevratné procesy ……

Ano, je tomu tak ….. ale jen u naší čtyřmolekulové soustavy.

Uvažme : čím se vlastně „řídí" chování jednotlivých částic soustavy :

Podle kinetické teorie je pohyb částic **neuspořádaný,** to znamená, že velikost rychlost, její směr, dráhu jednotlivých částic – tj. jejich přesuny v nádobě - **nemůžeme nijak ovlivnit** , proto je vytvoření nějakého uspořádání částic – mikrostavu – zcela **náhodný proces** (jev) a každý mikrostav proto vzniká (nastane) se **stejnou pravděpodobností** a trvá také stejnou dobu - to je **základní princip statistické mechaniky** :

Všechny mikrostavy termodynamické soustavy mají stejnou pravděpodobnost.

Mikrostavy jsou tedy stejně pravděpodobné, ale **makrostavy** sestávají z různého počtu mikrostavů - proto (matematické) pravděpodobnosti jejich výskytu jsou **různé**. Můžeme je lehce vypočítat jako poměr počtu příznivých jevů – mikrostavů daného stavu a počtu všech možných jevů – všech mikrostavů soustavy.
V našem příkladu soustavy 4 částic je celkový počet mikrostavů 24.
Potom pravděpodobnost 1. a 5. makrostavu (kdy je všechen plyn v jedné části nádoby) je :

$$P_1 = P_5 = \frac{1}{24} = 4{,}17\ \%$$

Pravděpodobnost nerovnovážného 2. a 4. makrostavu činí :

$$P_2 = P_4 = \frac{4}{24} = 16{,}7\ \%$$

A pravděpodobnost 3. makrostavu, kdy je plyn rovnoměrně rozložen v celé nádobě (tj. rovnovážný stav) :

$$P_3 = \frac{6}{24} = 25{,}0\ \%$$

> Pozn. : Při výpočtu každé pravděpodobnosti se vždy opakuje stejný celkový počet částic, proto se ve fyzice často používá veličina ***termodynamická pravděpodobnost*** w , rovná přímo počtu mikrostavů daného stavu.

Můžeme konstatovat, že v naší soustavě s malým počtem částic má **rovnovážný** stav **nejvyšší** pravděpodobnost (P_3) a **nerovnovážný** stavu odpovídající **zpětnému návratu** plynu do levé části nádoby má pak pravděpodobnost 6 x menší (P_5) – tj. **nejnižší** ze všech možných stavů. Tato pravděpodobnost je ale stejně dosti vysoká (přes 4 %), takže zpětný návrat čtyřmolekulového plynu do počátečního stavu je zcela reálný.

Podívejme se ovšem dále, jak se bude měnit chování termodynamické soustavy, když budeme počet jejích částic zvětšovat :

Protože při celkovém počtu částic N a počtu částic v levé části n_1 a v pravé části n_2 je počet mikrostavů roven počtu kombinací n_1 - té třídy z N prvků (bez zřetele k uspořádání ve skupině), nebo také n_2 - té třídy z N prvků :

$$\boxed{C_N^{n_1} = \binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1!\cdot(N-n_1)!} = \frac{N!}{n_1!\cdot n_2!} = \frac{N!}{(N-n_2)!\cdot n_2!} = \binom{N}{n_2}}$$

Potom můžeme lehce určit počty mikrostavů a pravděpodobnosti stavů pro libovolný vyšší počet částic. Jestliže zvolíme například $N = 100$, pak počet mikrostavů plynu , který by se navrátil zpět do levé části je stále roven jedné :

$$C_N^N = \binom{100}{100} = \frac{100!}{100!\cdot 0!} = 1$$

Ale počet mikrostavů rovnovážného stavu bude podstatně vyšší :

$$C_{n_1}^N = \binom{100}{50} = \frac{100!}{50!\cdot 50!} = 1{,}01\cdot 10^{29}$$

A jak vidíme, je skutečně vyšší, ale **neočekávaně vyšší** !

Zatímco při čtyřčásticovém plynu byla pravděpodobnost návratu plynu do levé části jen 6-krát menší než pravděpodobnost vytvoření rovnovážného stavu, nyní jde o **nepředstavitelný poměr** řádu 10^{29} (a to je ještě celkový počet 100 částic směšně malý oproti **skutečným** počtům částic hmoty – řádu Avogadrova čísla). Tedy :

Plyn se tedy při expanzi nikdy nevrátí zpět do levé části nádoby – ne proto, že by tento proces nebyl teoretiky možný – ale protože je zanedbatelně málo pravděpodobný.

Pozn. : Porovnejte s pravděpodobností výhry Sportce, kdy je počet možných kombinací „pouze“ :

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\cdot 43!} = 1{,}40\cdot 10^{7}$$

Dále uvažme, že z obecného kombinačního vzorce přímo vyplývá, že pro **rovnovážný stav** plynu má **počet mikrostavů** soustavy – tedy i **pravděpodobnost makrostavu** - vždy **nejvyšší možnou hodnotu**. Můžeme tedy obecně konstatovat :

Stav termodynamické rovnováhy uzavřené soustavy je tedy charakterizován nejen maximální entropií, ale i nejvyšší možnou pravděpodobností. Entropie je zřejmě rostoucí funkcí pravděpodobnosti stavu soustavy (Boltzmannův princip).

Rakouský fyzik Ludwig Boltzmann také první určil r. 1877 tvar této funkce :

$$\boxed{S = k\cdot \ln w} \qquad (+\,konst.)$$

vztah entropie a pravděpodobnosti

(V tomto vztahu je použita tzv. termodynamická pravděpodobnost w - počet mikrostavů daného stavu soustavy, k je Boltzmannova konstanta).

Uvažme ještě, že **nerovnovážný stav** uzavřené soustavy (např. když je plyn shromážděn jen v jedné části prostoru) znamená také **větší uspořádanost** („pořádek“) soustavy.

Přechod soustavy k **rovnovážnému** stavu je pak spojem se **ztrátou této uspořádanosti** (v soustavě vznikne „nepořádek“).

Tento přechod k rovnováze je **nevratný** – pořádek v izolované soustavě se „sám od sebe“ **neobnoví** - museli bychom zrušit izolaci soustavy a umožnit vnějším silám , aby svou **prací** obnovily uspořádanost, tedy snížily entropii (například pomocí nějakého pístu stlačí plyn do jedné části objemu soustavy).

Pozn. : Jestliže tedy fyzik říká svému kolegovi, že právě jde snižovat entropii, nemyslí tím nic neslušného, pouze dospěl k zásadnímu rozhodnutí, že je nezbytné uklidit pracovní stůl, knihovnu, nebo adresáře počítače.

Shrňme tedy naše poznatky o statistickém (pravděpodobnostním) smyslu druhé věty termodynamiky :

Směr nevratných procesů je odůvodněn vývojem termodynamické soustavy od méně pravděpodobných stavů ke stavům pravděpodobnějším (od uspořádanějších stavů ke stavům méně uspořádaným).

Zpětný (opačný) směr těchto procesů není principiálně nemožný, je však zanedbatelně málo pravděpodobný.

Pozn. : Z kombinačního vztahu pro mikrostavy je také vidět, že jejich počty jsou ještě dosti vysoké v určitém (relativně malém) okolí rovnovážného stavu. To je důvodem určitých **fluktuací** (časově proměnných změn) **stavových veličin** (např. tlaku) v okolí rovnovážného stavu soustavy. Tyto změny jsou za „normálního“ stavu neměřitelné a mají význam pouze v soustavách s malým počtem částic.
(Např. v kosmickém prostoru, nebo ve vakuové komoře při dolní hranici ultravakua, kdy 1 cm^3 plynu obsahuje jen asi 1000 částic - molekul).

---

konec kapitoly **K. Rusňák, verze 04/2006**

rev. 04/2007

Kmity hmotného bodu

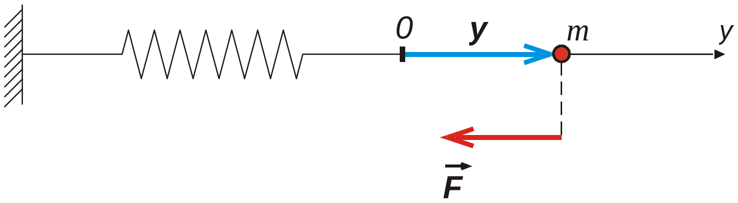
Jsou speciálním případem obecného mechanického pohybu hmotného bodu, při kterém se tento bod pohybuje v omezené oblasti kolem tzv. ***rovnovážné polohy*** . Tímto výrazem označujeme místo stabilní rovnováhy, ve kterém na hmotný bod nepůsobí žádná síla , eventuálně je nulová výslednice působících sil. Do rovnovážné polohy klademe pokud možno počátek soustavy souřadnic - potom polohový vektor hmotného bodu je současně jeho ***výchylkou*** z rovnovážné polohy.

Základním druhem kmitavého pohybu jsou tzv. ***netlumené harmonické kmity*** , které vzniknou, jestliže na hmotný bod působí síla úměrná jeho výchylce (tj. lineární závislost), ale opačně orientovaná :

$$\boxed{\vec{F} = -k \cdot \vec{r}}$$

pružná síla

Příkladem takové síly je síla pružiny (konstanta k je pak ***tuhost*** pružiny). Pro praktické aplikace je jistě velmi důležitou skutečností, že tato síla je spojena s tzv. ***pružnou deformací*** , kterou pozorujeme u pevných těles (také u kapalin a plynů) při relativně malých působících silách (matematicky ji vyjadřuje ***Hookův zákon***).



Těleso (hmotný bod) zavěšené na obyčejné pružině se ovšem většinou pohybuje pouze po přímce procházející osou pružiny. Pak je vhodné ztotožnit tuto přímku s některou ze souřadných os a dostaneme tak nejjednodušší případ ***jednorozměrných kmitů*** .

Souřadnice ve vektorové rovnici pro pružnou sílu jsou potom samozřejmě nenulové pouze na této ose, například na ose y :

$$\vec{F} = (0, F, 0) \qquad \vec{r} = (0, y, 0)$$

Dostaneme tedy skalární rovnici pro y-souřadnice (ostatní souřadnice dávají nulové rovnosti) :

$$F = -k \cdot y$$

A pohybová rovnice bude nenulová také pouze pro tuto souřadnici, tj. vzniká jediná skalární rovnice :

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = F = -k \cdot y$$

Po vydělení hmotností m a převedení na levou stranu dostaneme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$$

Podíl kladných konstant ve druhém členu se označuje jako kvadrát jiné konstanty, jejíž význam vyplyne z dalšího textu :

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

úhlová frekvence

Pak se pohybová rovnice změní na známý tvar :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y \ = \ 0}$$

pohybová rovnice lineárního harmonického oscilátoru

Nebo s formálním zápisem derivací :

$$\boxed{\ddot{y} + \omega^2 y = 0}$$

Tento vztah je ***homogenní lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty*** , kterou lze řešit jak v reálném, tak i v komplexním oboru proměnné y. V každém oboru je pak možno ***obecné řešení*** této rovnice sestavit jako lineární kombinaci dvou nezávislých ***partikulárních řešení*** .

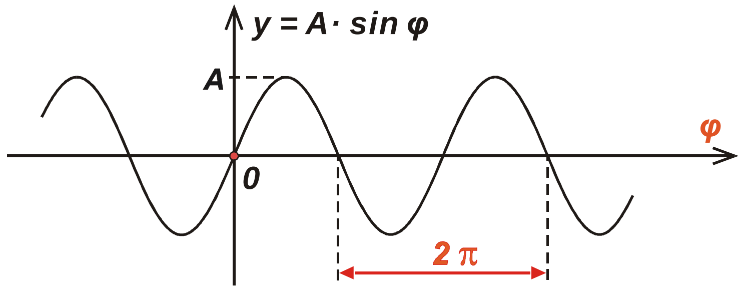
Jedním partikulárním řešením v reálném oboru je :

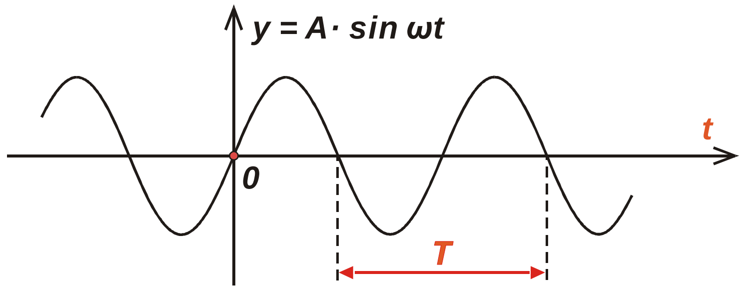
$$y = y(t) = A \cdot sin(\omega \cdot t) = A\, sin\, \omega t$$

Je to funkce všeobecně známá z analytické geometrie, definovaná na celém oboru reálných čísel.
Veličina A je ***amplituda*** kmitů, výraz za znakem sin , argument funkce sinus, někdy uváděný v závorce, je ***fázový úhel*** , zjednodušeně ***fáze*** kmitů :

$$\boxed{\varphi = \omega \cdot t}$$

Jak známo, v proměnné φ je tato funkce ***periodická*** s periodou 2π. Připomeňme, že periodou funkce je takový (nejmenší) interval proměnné, po kterém se průběh funkce opakuje (viz obr.)





Je zřejmé, že jako funkce času musí být výchylka $y(t)$ také periodická. Časový interval T, po kterém se průběh výchylky opakuje, se nazývá ***periodou kmitů*** **.** Za tuto dobu proběhne jeden kmit, je to tedy také ***doba kmitu*** (viz obr.). Převrácenou hodnotou je potom počet kmitů za jednotku času , tj.:

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

frekvence kmitů jednotkou je $[\frac{1}{s}] = [s^{-1}] = [Hz]$

Porovnáním odpovídajících period fáze a času vznikne vztah :

$$2\pi = \omega \cdot T$$

Můžeme tak najít smysl veličiny ω jako frekvence vyjádřené f - násobkem úhlu 2π :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f}$$

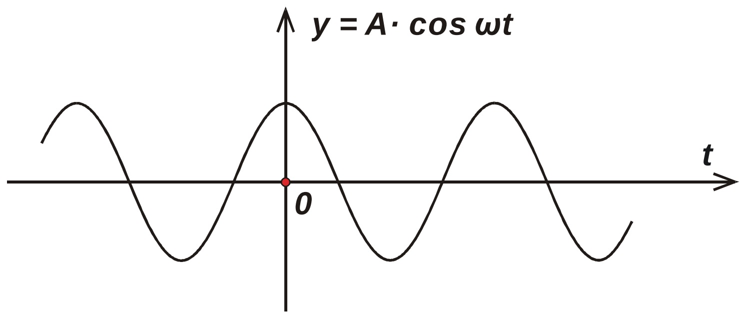
úhlová frekvence

Jak dále uvidíme, ve vztahu ke kruhovému pohybu by bylo možno nazývat tuto veličinu také ***úhlovou rychlostí*** , při popisu kmitů to ovšem není označení příliš vhodné.

Druhým reálným partikulárním řešením rovnice kmitů je funkce :

$$y = y(t) = A \cdot cos(\omega.t) = A \cdot cos\,\omega t$$

Středoškolské znalosti postačují ke konstatování, že jde o stejnou funkci - sinusovku, pouze posunutou na ose fáze o úhel $\pi/2$ (viz obr.). Vyjadřuje tedy stejný druh kmitání (se stejnou frekvencí, periodou a amplitudou), pouze fázově a tedy i časově posunutý.



Pro popis harmonických kmitů má tak stejné oprávnění jak funkce sinus, tak funkce kosinus. Ostatně, pomocí součtových vzorců lze druhé partikulární řešení v případě potřeby převést na tvar řešení prvního :

$$y = y(t) = A \cdot \cos \omega t = A \cdot \sin(\omega t + \pi/2)$$

Obě partikulární řešení jsou však lineárně nezávislá , proto můžeme vyjádřit ***obecné řešení*** pohybové rovnice kmitů (v reálném oboru) jako jejich lineární kombinaci (*C* a *D* jsou libovolná reálná čísla):

$$\boxed{y = y(t) = C \cdot \sin \omega t + D \cdot \cos \omega t}$$

obecné řešení rovnice kmitů

Význam této rovnice odhalíme tak, že místo konstant C a D (které jsou libovolné), zvolíme jiné (také libovolné) konstanty A a φ_o pomocí vztahů :

$$D = A \cdot \sin \varphi_o$$

$$C = A \cdot \cos \varphi_o$$

Po dosazení dostaneme :

$$y = y(t) = A \cdot \cos \varphi_o \cdot \sin \omega t + A \cdot \sin \varphi_o \cdot \cos \omega t$$

A s využitím součtových vzorců přejde tato rovnice na nejznámější tvar harmonických kmitů :

$$\boxed{y = y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_o)}$$

obecné řešení rovnice kmitů *(jiný tvar)*

Vidíme, že obecné řešení představuje opět známou sinusovku (stejné frekvence a amplitudy), ale se složitější fází :

$$\boxed{\varphi = \omega t + \varphi_o}$$

obecná fáze kmitů

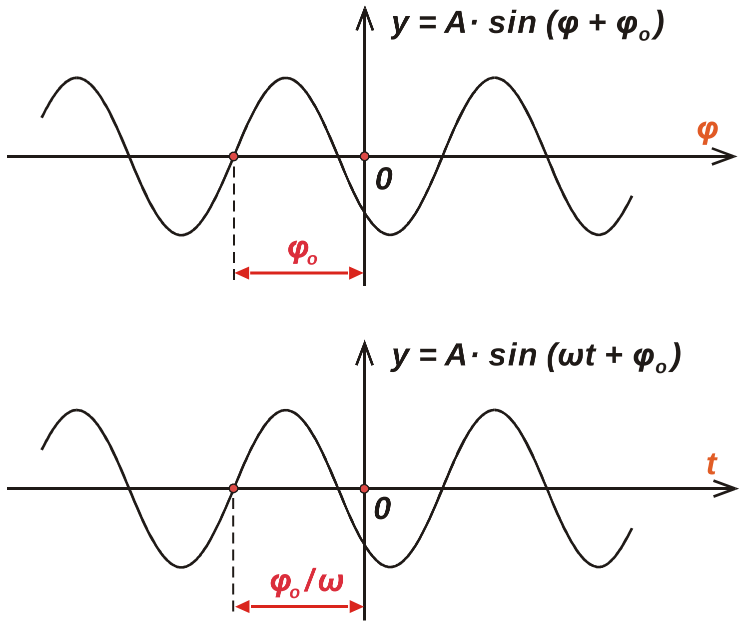
Tato obecná sinusovka již neprochází počátkem souřadnic, neboť v počátečním čase (t = 0) již velikost fáze není nulová, ale je dána ***fázovou konstantou*** ***(počáteční fází)*** φ_o . Pro (základní) nulový bod funkce musí potom platit :

$$0 = \omega t + \varphi_o$$

A graf funkce tedy protíná časovou osu v místě :

$$t = -\frac{\varphi_o}{\omega}$$

Vhodnou volbou počáteční fáze φ_o lze proto obecnou sinusovku umístit (posunout) do libovolné polohy na ose proměnné (viz obr.) :



Víme již, že funkce cos se od funkce sin liší pouze fázovým posuvem, proto může být obecné řešení napsáno rovněž ve tvaru :

$$\boxed{y = y(t) = A \cdot cos(\omega t + \varphi_o)}$$

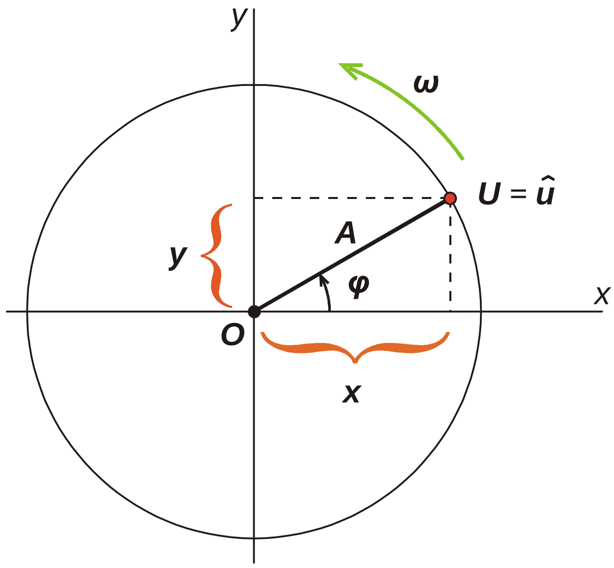
obecné řešení rovnice kmitů *(další tvar)*

Všechny tvary obecného řešení obsahují vždy ***dvě (integrační) konstanty*** A a φ_o $(C \; a \; D)$. Jejich stanovením můžeme popsat kmity libovolné amplitudy A a libovolné polohy na ose času, určené počáteční fází φ_o (a frekvence je určena hodnotami parametrů k a m).

Při řešení konkrétního případu kmitů se potom velikost integračních konstant určuje pomocí tzv. ***okrajových podmínek*** (jako jsou například počáteční podmínky - zadáme polohu a rychlost hmotného bodu v počátečním čase, většinou pro $t = 0$).

Komplexní zápis kmitů

V rovině kartézských souřadnic xy si představme rovnoměrný kruhový pohyb hmotného bodu U na poloměru A úhlovou rychlostí ω (v kladném smyslu). Počátek soustavy souřadnic nechť je ve středu kružnice, poloměr A je pak současně velikostí průvodiče hmotného bodu.



Pro úhel opsaný průvodičem za čas t platí podle kinematiky :

$$\varphi = \omega \cdot t + \varphi_o$$

Vidíme, že tento výraz je formálně shodný s obecnou fází harmonických kmitů .

Dále platí pro průmět poloměru A do osy y, tj. pro y-ovou souřadnici bodu U :

$$y = A \cdot sin\,\varphi = A \cdot sin(\,\omega.t + \varphi_o\,)$$

A pro průmět poloměru A do osy x, tj. pro x-ovou souřadnici bodu U je potom analogicky:

$$x = A \cdot cos\,\varphi = A \cdot cos(\,\omega\,t + \varphi_o\,)$$

Tento kruhový pohyb s úhlovou rychlostí ω je tedy formálně (matematicky) zcela ***jednoznačně přiřazen*** harmonickému kmitavému pohybu stejné úhlové frekvence.

Toto přiřazení bude ještě dále rozvinuto následovně :

Bod U v rovině xy můžeme považovat za komplexní číslo a napišme pak jeho matematický tvar :

$$\hat{u} = x + i \cdot y$$

Dosaďme za obě souřadnice výše uvedené průměty a použijme Eulerův vztah matematiky :

$$\hat{u} = A \cdot cos\,\varphi + i \cdot A \cdot sin\,\varphi = A \cdot (cos\,\varphi + i \cdot sin\,\varphi\,) = A \cdot e^{i \cdot \varphi} = A \cdot e^{i \cdot (\,\omega \cdot t + \varphi_o\,)}$$

Vzniklý komplexní výraz s argumentem rovným fázi kmitů je samozřejmě formálně (matematicky) také zcela ***jednoznačně přiřazen*** harmonickému kmitavému pohybu stejné fáze.

Skutečná výchylka hmotného bodu je potom v tomto komplexním výrazu obsažena jako jeho imaginární, případně reálná část.

Tento komplexní tvar harmonických kmitů se většinou upravuje následovně :

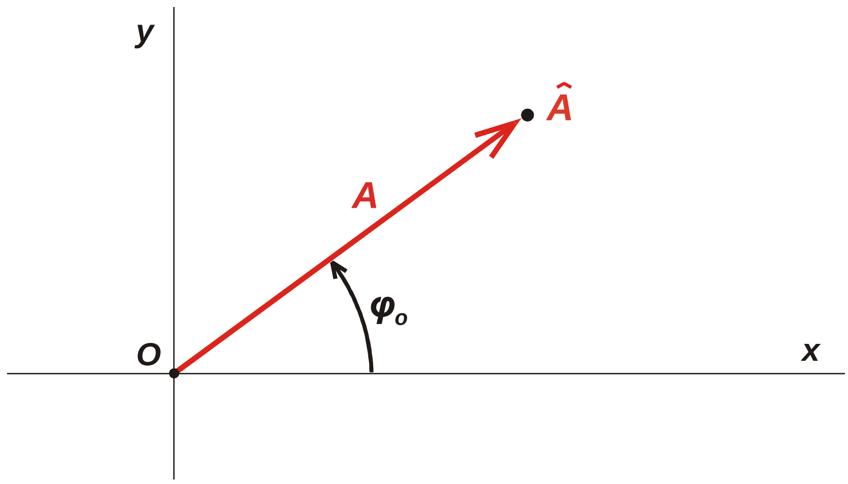
$$\hat{u} = A \cdot e^{i \cdot (\omega \cdot t + \varphi_o)} = A \cdot e^{i \cdot \varphi_o} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Přitom se definuje veličina :

$$\boxed{\hat{A} = A \cdot e^{i \cdot \varphi_o}}$$

komplexní amplituda kmitů

Komplexní amplituda zde vystupuje jako velmi významná veličina, protože obsahuje dva ze tří parametrů kmitů – amplitudu A a fázovou konstantu φ_o , které jsou zásadně důležité v různých aplikacích, kdy frekvence je zadanou veličinou (určenou hodnotami veličin k a m).



Harmonické kmity lze tedy zapsat ve tvaru :

$$\boxed{\hat{u} = \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}}$$

komplexní tvar kmitů

Výhodou tohoto zápisu kmitů je relativní jednoduchost matematických operací s komplexními výrazy. Například při skládání kmitů je nesrovnatelně jednodušší a rychlejší sečtení komplexních čísel, než použití poněkud těžkopádných goniometrických součtových vzorců pro reálné sinusovky.

Na závěr uvidíme, jak celý tento odstavec o komplexní formě kmitů, který vlastně začal poněkud divným porovnáváním dvou naprosto odlišných mechanických pohybů – kmitavého a kruhového, dostane jasný matematický podklad.

Zodpovíme totiž logickou otázku, jak dalece souvisí tento nově definovaný komplexní tvar kmitů s pohybovou rovnicí lineárního harmonického oscilátoru :

Pro rychlou odpověď stačí pouze znalost pravidel o derivacích - jak reálná , tak i imaginární část komplexního tvaru kmitů, které obě představují reálné kmity (výchylku) hmotného bodu, jsou přece řešením (partikulárním) diferenciální pohybové rovnice. Komplexní výraz je ale vytvořen jejich formálním matematickým součtem, nebo spíše lineární kombinací :

$$\widehat{u} = x + i \cdot y$$

Proto ***komplexní tvar kmitů je také řešením stejné diferenciální rovnice***, dokonce řešením obecnějším, v komplexním oboru čísel.

Toto tvrzení můžeme rovněž zdůvodnit obecnou ***teorií diferenciálních rovnic*** :

Víme, že každá lineární homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty má v komplexním oboru partikulární řešení (integrál) :

$$y = C \cdot e^{\alpha \cdot t}$$

Přitom C je libovolná komplexní (integrační) konstanta a α je kořenem tzv. charakteristické rovnice , která vznikne dosazením tohoto řešení do diferenciální rovnice.

Obecné řešení diferenciální rovnice n-tého řádu lze potom napsat jako lineární kombinaci n nezávislých partikulárních řešení :

$$y = C_1 \cdot e^{\alpha_1 .t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 .t} + C_3 \cdot e^{\alpha_3 .t} + \ldots\ldots$$

Dosaďme tedy nyní výše uvedený partikulární integrál do naší diferenciální rovnice. Po vykrácení exponencielních výrazů dostaneme :

$$\boxed{\alpha^2 + \omega^2 = 0}$$ ***charakteristická rovnice***

Tato charakteristická rovnice je kvadratická a má proto dvě řešení :

$$\alpha_{1,2} = \pm i \cdot \omega$$

Existují tedy dvě partikulární řešení a obecné řešení pohybové rovnice lineárního harmonického oscilátoru má v komplexním oboru tvar :

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{+i.\omega.t} + C_2 \cdot e^{-i.\omega.t}}$$ ***obecné řešení*** *(v komplexním oboru)*

Toto obecné řešení obsahuje dvě libovolné integrační konstanty (komplexní), jak je typické pro diferenciální rovnici druhého řádu.

Obecné řešení musí samozřejmě obsahovat všechna předchozí speciální řešení – matematicky to znamená, že obecné řešení můžeme na ně převést vhodnou volbou integračních konstant :

a) Jestliže například zvolíme :

$$C_1 = A \cdot e^{i \cdot \varphi_o}$$
$$C_2 = 0$$

Potom jejich dosazením dostaneme přímo **komplexní tvar kmitů**, včetně komplexní amplitudy :

$$y = C_1 \cdot e^{+i.\omega.t} + C_2 \cdot e^{-i.\omega.t} = A \cdot e^{i \cdot \varphi_o} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + 0 = \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

Současně také vidíme, že náš komplexní tvar kmitů sice není nejobecnějším řešením pohybové rovnice, ale je řešením optimálním .

Obecné řešení je totiž zřejmě fyzikálně nevhodné – jeho dvě komplexní - tedy čtyři reálné - konstanty jsou nadbytečné, neboť popis skutečných (reálných) kmitů vyžaduje pouze dvě reálné konstanty (amplitudu A a fázovou konstantu φ_o)

b) Bez problémů je ovšem také možno pracovat i se zápornou exponencielou - se druhou částí obecného řešení – to znamená, že můžeme zvolit :

$$C_1 = 0$$
$$C_2 = A \cdot e^{-i \cdot \varphi_o}$$

Této možnosti využili fyzikové při zápisu pravděpodobnostní vlny (vlnové funkce) v kvantové fyzice.

c) Podívejme se ještě, že vhodnou volbou konstant lze převést obecné komplexní řešení i na reálné harmonické kmity - tj. na reálnou sinusovku :

Upravme nejprve obecný tvar pomocí Eulerovy matematické identity :

$$y = C_1 \cdot e^{+i.\omega.t} + C_2 \cdot e^{-i.\omega.t} = C_1 \cdot (\cos \omega t + i \cdot \sin \omega t) + C_2 \cdot (\cos \omega t - i \cdot \sin \omega t)$$

A vytkněme ve výrazu goniometrické funkce :

$$\boxed{y = (C_1 + C_2) \cdot \cos \omega t + i \cdot (C_1 - C_2) \cdot \sin \omega t}$$

Laskavý čtenář celkem lehce nahlédne, že když bychom integrační konstanty zvolili ve tvaru :

$$C_1 = - C_2 = - i \cdot \frac{A}{2}$$ (kde A je libovolné reálné číslo)

Pak dostaneme naše první reálné partikulární řešení :

$$y = A \cdot \sin \omega t$$

A po volbě integračních konstant ve tvaru :

$$C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$$

Vznikne naše druhé reálné partikulární řešení :

$$y = A \cdot cos\,\omega t$$

A pro převod na reálnou obecnou sinusovku postačí zvolit komplexní konstanty C_1 a C_2 jako :

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot (C - i \cdot D) \qquad C_2 = \frac{1}{2} \cdot (C + i \cdot D)$$ (kde C a D jsou libovolná reálná čísla)

Po dosazení do obecného řešení v rámečku pak totiž dostaneme :

$$y = C \cdot sin\,\omega t + D \cdot cos\,\omega t$$

Což je vlastně – jak víme z úvodních stránek této otázky – obecné řešení pohybové rovnice harmonického oscilátoru v reálném oboru – obecně posunutá sinusovka :

$$\boxed{y = C \cdot sin\,\omega t + D \cdot cos\,\omega t = A \cdot sin(\omega t + \varphi_o)}$$

Celkem můžeme konstatovat, že žádný matematický rozpor, či problém, nám nebrání v tom, abychom reálné, skutečné kmity – výchylky hmotného bodu - popisovali komplexními výrazy (funkcemi), které ač matematicky složitější, jsou „uživatelsky“ rozhodně příjemnější.
Jejich výhodu pak oceníme později, při skládání kmitů a vlnění .

Rychlost a zrychlení kmitavého pohybu

Již v úvodu jsme konstatovali, že kmity jsou pouze speciálním případem mechanického pohybu. Lze tedy standardním způsobem počítat základní kinematické veličiny rychlost a zrychlení podle vztahů:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

V našem jednorozměrném případě to ovšem budou skalární výrazy (y–ové souřadnice těchto vektorů). Použijme pro výpočet zjednodušený tvar kmitů bez fázové konstanty, aby bylo jasně vidět vzniklé fázové odchylky vypočítaných veličin :

$$y = y(t) = A \cdot sin\,\omega t$$

Potom bude rychlost hmotného bodu:

$$v = v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(A \cdot sin\,\omega t) = A\omega \cdot cos\,\omega t = v_m \cdot sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Rychlost je opět harmonická funkce času stejné frekvence, ale fázově posunutá oproti kmitům o čtvrt periody („předbíhá“ kmity) , s amplitudou - tj. maximální hodnotou rychlosti :

$$v_m = A\omega$$

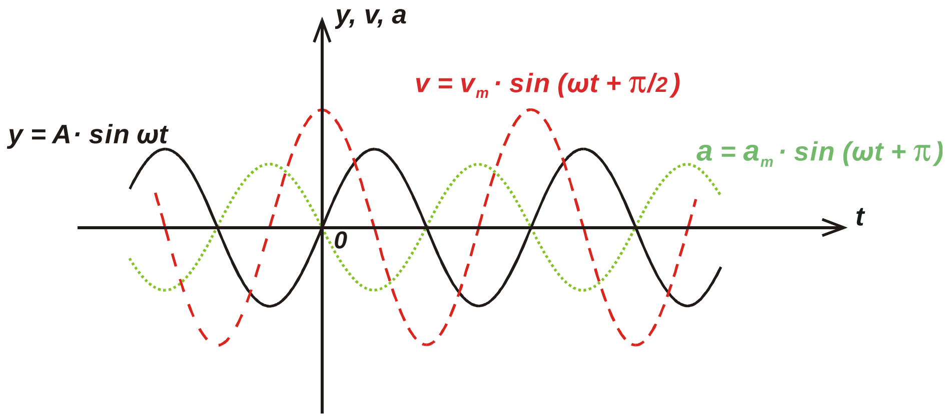
Další derivací pak získáme zrychlení hmotného bodu:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(A\omega \cdot \cos\omega t) = -A\omega^2 \sin\omega t = a_m \cdot \sin(\omega t + \pi)$$

I zrychleni je harmonická funkce času stejné frekvence, ale fázově posunutá oproti kmitům o půl periody („předbíhá“ kmity) a s amplitudou - tj. maximální hodnotou zrychlení :

$$a_m = A\omega^2$$

Prohlédněte si na obrázku znázorněné časové závislosti ***výchylky, rychlosti a zrychlení*** a uvědomte si jejich fázové posuny, které by ovšem bylo možno znázornit také na obrázku komplexních amplitud (jak je obvyklé v elektrotechnice, při studiu proudů a napětí ve střídavých obvodech).



Energie kmitavého pohybu

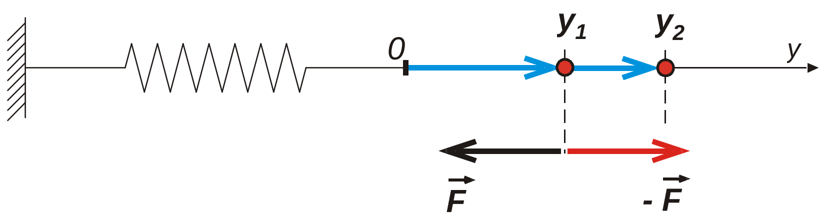
Jednoduchý je výpočet ***kinetické energie*** podle známého vzorce z mechaniky, do kterého dosadíme za rychlost výraz z předchozího odstavce:

$$\boxed{W_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m(A\omega \cdot \cos\omega t)^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t}$$ **kinetická energie**

Energii potenciální lze vypočítat, jen pokud je pole pružné síly konzervativní. Zřejmě tomu tak skutečně je, neboť k natažení (stlačení) pružiny je nutno vykonat určitou práci, kterou při uvolnění pružiny „dostaneme“ zpátky.
Pro obecný důkaz bychom ale museli zkoumat práci na libovolné dráze v prostorově rozloženém silovém poli pružné síly (takové pole by vytvořila i např. jediná pružina volně otočná kolem bodu upevnění).

V našem jednorozměrném případě pak máme jedinou možnost - počítat práci potřebnou k posunutí hmotného bodu po přímé dráze na ose y z počátečního místa y_1 do koncového místa y_2 :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{y_1}^{y_2} -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Dosadíme tedy výrazy, vyjadřující pohyb pouze na ose y :

$$\vec{F} = (0, F, 0)$$

$$\vec{r} = (0, y, 0)$$

$$F = -k \cdot y$$

do skalárního součinu vyjadřujícího elementární práci :

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = F_y \cdot dy = F \cdot dy$$

A dostaneme:

$$A = \int_{y_1}^{y_2} -F \cdot dy = \int_{y_1}^{y_2} -(-k\,y)dy = k \cdot \int_{y_1}^{y_2} y \cdot dy = k \cdot \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_{y_1}^{y_2} = \tfrac{1}{2}\, k\, y_2^2 - \tfrac{1}{2}\, k\, y_1^2$$

Vykonaná práce v poli pružné síly zjevně splňuje (v rámci možností jednorozměrného případu) podmínky ***konzervativnosti*** - nezávisí na dráze , ale pouze na počátečním a koncovém bodu, a při pohybu zpět bude mít opačné znaménko, tj. „dostaneme “ ji zpátky.

Pro zjednodušení výrazu zvolíme počáteční bod v rovnovážné poloze, pak tedy v koncovém bodě y_2 bude mít hmotný bod potenciální energii vzhledem k bodu 0 (koncový bod je libovolný, napíšeme ho tedy bez indexu) :

$$\boxed{W_p(\vec{r}) = W_p(y) = \tfrac{1}{2}\, k\, y^2}$$

potenciální energie pružné síly (jednorozm.)

Pro konkrétní výpočet dosadíme za výchylku (postačí opět zjednodušený tvar bez fázové konstanty) a upravíme pomocí vztahu pro úhlovou frekvenci :

$$W_p = \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} k (A \cdot \sin \omega t)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cdot \sin^2 \omega t$$

Povšimněte si, že <u>potenciální i kinetická</u> energie jsou <u>nezáporné</u> funkce času, nejsou sice harmonické, ale jsou <u>periodické</u> , s poloviční periodou, tj. během jednoho kmitu dosahují dvakrát svého maxima (ne však ve stejném čase).

Nakonec vypočítáme ***<u>celkovou mechanickou energii harmonického pohybu</u>*** :

$$W = W_p + W_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cdot \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t$$

Můžeme vytknout a použít známého trigonometrického vzorce:

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cdot (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = konst.$$

<u>Celková mechanická energie je tedy konstantní</u>, jak se sluší na konzervativní silové pole. Jestliže dosadíme ze vztahů pro úhlovou frekvenci a pro amplitudu rychlosti :

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$v_m = A \omega$$

Pak dostaneme jiné vyjádření celkové energie :

$$\boxed{W = W_p + W_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_m^2}$$

<u>celková energie</u>

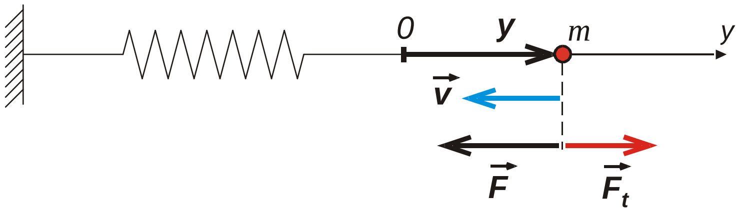
Tento vztah nám dobře ukazuje, jak se potenciální energie „přelévá“ do energie kinetické a naopak, takže v místě maximální výchylky (amplitudy) je celková energie rovna <u>energii potenciální</u> (a kinetická energie je tedy nulová) a v místě maximální rychlosti je pak celková energie rovna <u>energii kinetické</u> (a potenciální je nulová - jaké je to místo?).

(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 01/2005, doplněno 04/2006, rev. 04/2008**

Tlumené kmity

V praxi téměř vždy brání pohybu nějaká brzdicí síla, jejíž původ je v třecích silách mezi reálnými tělesy. Matematický popis těchto sil bývá dosti komplikovaný. Velmi často se vyskytuje tzv. ***viskózní tření*** , kdy je velikost třecí síly úměrná rychlosti :

$$\boxed{\vec{F}_t = -B \cdot \vec{v} = -B \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}$$



Potom je nutno přidat tuto sílu k pružné síle oscilátoru. V našem jednorozměrném případě tak vznikne rovnice :

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \cdot y - B \cdot \frac{dy}{dt}$$

Jednoduchými úpravami a použitím standardního označení derivací dostaneme :

$$\ddot{y} + \frac{B}{m} \cdot \dot{y} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$$

Označme v této rovnici, stejně jako u netlumených kmitů :

$$\boxed{\frac{k}{m} = \omega^2}$$

vlastní úhlová frekvence

Název „vlastní“ u úhlové frekvence označuje její příslušnost k netlumené sestavě „pružina–hmotný bod“, bez působení brzdicích třecích sil . S touto vlastní frekvencí by tedy kmital náš hmotný bod jako netlumený lineární harmonický oscilátor.

Dále zavedeme v pohybové rovnici novou konstantu b, která vyjadří intenzitu účinku brzdicích sil (je úměrná brzdnému zrychlení) :

$$\boxed{\frac{B}{m} = 2b}$$

konstanta útlumu

A dostaneme tak konečný, nejjednodušší tvar pohybové rovnice :

$$\boxed{\ddot{y} + 2b\,\dot{y} + \omega^2 y = 0}$$

pohybová rovnice tlumených kmitů

Je to lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty . Připomeňme, že každá taková rovnice má partikulární řešení (integrál) :

$$y = C \cdot e^{\alpha .t}$$

Přitom C je libovolná (integrační) konstanta a α je kořenem tzv. charakteristické rovnice , která vznikne dosazením tohoto řešení do diferenciální rovnice.

Obecné řešení diferenciální rovnice n-tého řádu je pak lineární kombinací n nezávislých partikulárních řešení :

$$y = C_1 \cdot e^{\alpha_1 .t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 .t} + C_3 \cdot e^{\alpha_3 .t} + ...$$

Tolik k obecné teorii. Dosaďme nyní výše uvedený partikulární integrál do naší diferenciální rovnice a po vykrácení exponencielních výrazů dostaneme charakteristickou rovnici :

$$\boxed{\alpha^2 + 2b\alpha + \omega^2 = 0}$$

Tato rovnice je kvadratická, můžeme tedy hned napsat její standardní řešení :

$$\alpha_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

Existují tak dvě partikulární řešení a obecné řešení bude mít tvar :

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{\alpha_1 .t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 .t}}$$

O konkrétním tvaru tohoto matematického výrazu pak rozhodne velikost konstant b a ω :

1) **případ malého tlumení (b < ω)**

Za této podmínky vznikne pod odmocninou záporný výraz a oba kořeny charakteristické rovnice jsou proto komplexní čísla :

$$\alpha_{1,2} = -b \pm i.\sqrt{\omega^2 - b^2}$$

Tento výraz ještě zjednodušíme označením :

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2}}$$

úhlová frekvence tlumených kmitů

(Důvod tohoto názvu poznáme z dalších řádků.)

Pak tedy bude :

$$\alpha_{1,2} = -b \pm i.\omega_1$$

A obecné řešení zapíšeme :

$$y = C_1 \cdot e^{(-b + i.\omega_1).t} + C_2 \cdot e^{(-b - i.\omega_1).t} = e^{-b.t} \cdot (C_1 \cdot e^{+i.\omega_1 .t} + C_2 \cdot e^{-i.\omega_1 .t})$$

Vidíme, že toto řešení je také komplexní, má tvar součinu reálného členu a komplexního výrazu v závorce , který ovšem již umíme identifikovat – je to komplexní vyjádření obyčejných, **netlumených** harmonických kmitů s úhlovou frekvencí ω_1 .

Pro vyhodnocení skutečných výchylek převedeme raději toto komplexní vyjádření na „obyčejnou“ obecnou sinusovku (stačí vhodně zvolit integrační konstanty - viz minulá kapitola „Netlumené kmity“, strana 9), první reálný člen samozřejmě ponecháme.

Vztah pro skutečnou výchylku tlumených kmitů bude mít potom tvar :

$$\boxed{y = A \cdot e^{-b.t} \cdot sin(\omega_1 t + \varphi_o)}$$

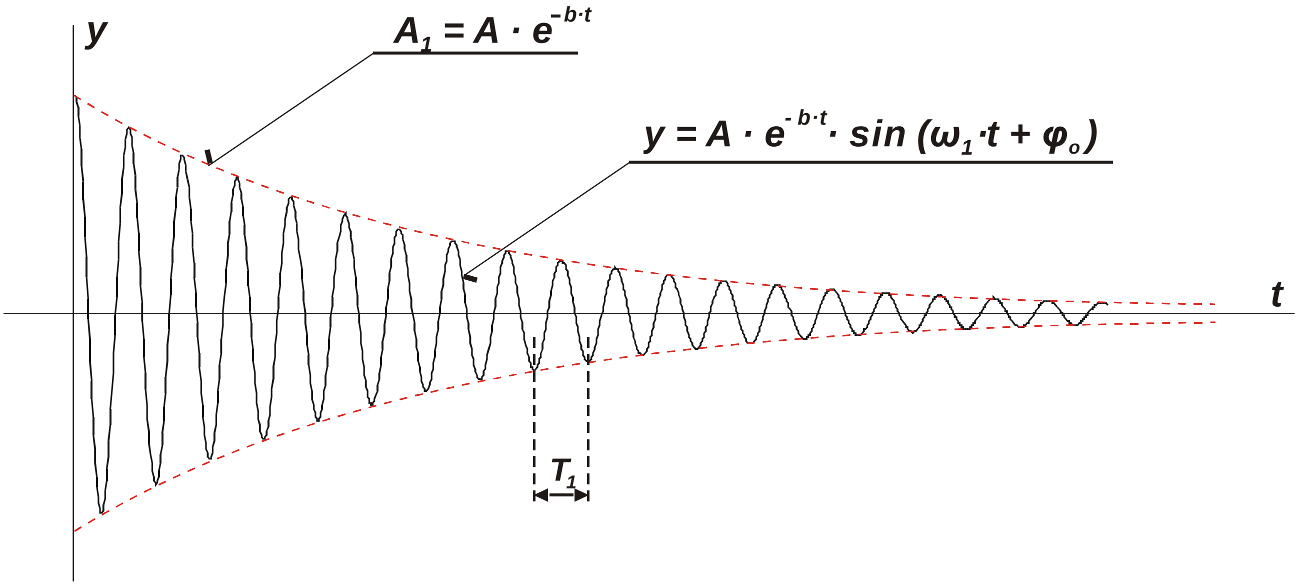
tlumené kmity

I když získaný vztah obsahuje funkci sinus, dokonce se standardním tvarem fáze, nemůžeme ho označit jako harmonické kmity, protože před sinem není konstantní amplituda, ale klesající exponenciela, která sinusovku určitým způsobem „deformuje“.

Jestliže by ovšem tlumení nebylo „příliš vysoké“ – což by se projevilo tak, že hmotný bod by vykonal „větší počet“ výkyvů na obě strany, než by se jeho maximální výchylka „silně přiblížila“ k nulové rovnovážné poloze (viz následující obrázek) – pak bychom takové kmity mohli interpretovat jako kvaziharmonické (přibližně harmonické) , které sice mají stálou úhlovou frekvenci ω_1 , ale proměnnou amplitudu , klesající s časem podle vztahu :

$$\boxed{A_1 = A \cdot e^{-b.t}}$$

amplituda tlumených kmitů



Pozn. : Pro grafické znázornění kmitů bylo nutno pomocí ***okrajových podmínek*** úlohy konkrétně vypočítat konstanty A a φ v obecné rovnici kmitů (jsou to tedy dvě integrační konstanty, jako v každém řešení diferenciální rovnice druhého řádu).

Nejjednodušší je definovat ***počáteční podmínky*** pohybu : nechť například vychýlíme hmotný bod (tj. natáhneme pružinu) do nějaké počáteční klidové polohy (například jednotkové) a pak ho vypustíme s počáteční nulovou rychlostí - velikosti výchylky a rychlosti hmotného bodu v počátečním (nulovém) čase tedy budou :

$$y(0) = y_o = konst = 1 \ [m]$$

$$v(0) = v_o = konst. = 0 \ [m/s]$$

Nyní napíšeme obecnou rovnici pro výchylku :

$$y = A \cdot e^{-b.t} \cdot sin(\omega_1 t + \varphi_o)$$

A její derivací určíme vztah pro rychlost :

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot (-b) \cdot e^{-b.t} \cdot sin(\omega_1 t + \varphi_o) + A \cdot e^{-b.t} \cdot \omega_1 \cdot cos(\omega_1 t + \varphi_o)$$

Do těchto rovnic pak dosadíme stanovenou počáteční výchylku a počáteční rychlost :

$$y_o = 1 = A \cdot e^{-b.0} \cdot sin(\omega_1 .0 + \varphi_o) = A \cdot sin\varphi_o$$

$$v_o = 0 = A \cdot (-b) \cdot e^{-b.0} \cdot sin(\omega_1 .0 + \varphi_o) + A \cdot e^{-b.0} \cdot \omega_1 \cdot cos(\omega_1 .0 + \varphi_o)$$
$$= -b \cdot A \cdot sin\,\varphi_o + A \cdot \omega_1 \cdot cos\,\varphi$$

Dostaneme tak dvě rovnice pro dvě neznámé integrační konstanty. Pro jejich řešení platí :

$$A = \frac{1}{sin\,\varphi_o}$$

$$tg\,\varphi_o = \frac{\omega_1}{b}$$

Goniometrické funkce ovšem neumožňují jednoduché explicitní vyjádření integračních konstant, řešme proto jen případ velmi malého tlumení ($b << \omega$), kdy můžeme přibližně psát :

$$\omega_1 \cong \omega \qquad tg\,\varphi_o >> 1$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_o \cong \frac{\pi}{2} \qquad A \cong 1$$

Konkrétní vztah pro výchylku pak bude mít jednoduchý tvar :

$$y = 1 \cdot e^{-b.t} \cdot sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2})$$

Nebo-li :

$$\boxed{y = e^{-b.t} \cdot cos\,\omega_1 t}$$

Aby bylo zaručeno velmi malé tlumení pohybu, byl pro znázornění této funkce na předchozím obrázku použit poměr $\omega : b = 40 : 1$.

Z výše uvedeného vztahu pro ω_1 :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2} < \omega$$

je dobře vidět, že <u>úhlová frekvence</u> ω_1 tlumených kmitů je <u>menší</u> než vlastní úhlová frekvence ω (kterou by měl oscilátor, kdyby nebyl tlumen).

Doba kmitu je tedy větší – jinak řečeno - ***tlumené kmitání je pomalejší než netlumené*** :

$$\boxed{T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} \geq \frac{2\pi}{\omega} = T}$$

Běžně používané označení perioda pro T_1 zde není příliš vhodné, protože tlumený pohyb vlastně - matematicky přesně vzato - není periodický – průběh funkce se přece kvůli klesající amplitudě nikdy neopakuje .

Pozn. : Tlumené kmity jsou tedy také pseudoperiodickým pohybem : nulové body za sebou sice následují po době rovné polovině doby kmitu T_1 , stejně taková je i doba mezi dvěma po sobě následujícími krajními výchylkami, ale například pohyb oscilátoru z nulové polohy do krajní výchylky trvá kratší než dobu než pohyb z této krajní výchylky zpět do nulové polohy.

Brzdicí síla tedy kmity harmonického oscilátoru zpomalí a postupně zmenšuje jejich amplitudu . Velikost konstanty útlumu b má proto zásadní vliv na vzniklý pohyb hmotného bodu.

Protože doba kmitu T_1 je periodou funkce sinus, můžeme jednoduše vypočítat poměr dvou po sobě následujících maximálních výchylek na jednu stranu - tedy výchylek v časech t a $t + T_1$:

$$\frac{y(t)}{y(t+T_1)} = \frac{A \cdot e^{-b.t} \cdot sin(\omega_1 t + \varphi_0)}{A \cdot e^{-b.(t+T_1)} \cdot sin(\omega_1 (t + T_1) + \varphi_0)} = e^{+b.T_1}$$

Tento (bezrozměrný) poměr se označuje jako ***útlum*** λ a vidíme, že je stejný pro libovolná dvě stejnolehlá maxima - pro daný tlumený oscilátor je tedy charakteristickou, konstantní veličinou (stejně jako konstanta útlumu b) :

$$\boxed{\lambda = \frac{y(t)}{y(t+T_1)} = e^{+b.T_1}}$$

útlum

Jeho přirozený logaritmus se nazývá ***logaritmický dekrement*** δ tlumených kmitů :

$$\boxed{\delta = ln\,\lambda = b \cdot T_1 = 2\pi \frac{b}{\omega_1}}$$

logaritmický dekrement

Se znalostí těchto veličin je pak možno u daného oscilátoru jednoduše stanovit konstantu útlumu, potřebnou pro vyřešení pohybové rovnice (přímé experimentální určení této konstanty z její definice totiž jistě není jednoduchou záležitostí - musíme mít prostředky pro měření jak brzdné síly, tak rychlosti tělesa i jeho hmotnosti) :

Postačí pouze oscilátor rozkmitat a ze změřené periody kmitů a z poměru stejnolehlých maxim ihned přímo vypočítáme konstantu útlumu :

$$\boxed{b = \frac{\delta}{T_1} = \frac{ln\,\lambda}{T_1}}$$

Jelikož amplituda určuje celkovou mechanickou energii kmitů, je zřejmé, že u tlumených kmitů dochází k postupnému poklesu této energie, v limitě až na nulovou hodnotu, kdy kmity vymizí.
Úbytek celkové energie je způsoben prací brzdicí síly a tato práce se u třecích sil „bez užitku" mění na tepelnou energii.

Protože viskózní třecí síla, úměrná rychlosti, neovlivní mechanickou energii hmotného bodu (při výpočtu potenciální energie se uvažuje nekonečně pomalý pohyb, kdy je tato síla nulová, a při výpočtu energie kinetické hraje roli pouze rychlost), můžeme pro stanovení energie tlumených kmitů využít vztah, odvozený v minulé kapitole pro volně kmitající hmotný bod :

$$W = W_p + W_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Do této rovnice pak pouze dosadíme parametry tlumených kmitů – jejich úhlovou frekvenci a amplitudu :

$$W = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_1^2 = \frac{1}{2} m \omega_1^2 (A \cdot e^{-b.t})^2 = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A^2 \cdot e^{-2b.t}$$

Vznikne tak použitelný vztah pro celkovou mechanickou energii tlumeného oscilátoru :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A^2 \cdot e^{-2b.t}}$$

energie tlumeného oscilátoru

Je dobře vidět, že celková energie tlumeného oscilátoru je exponenciálně klesající funkcí času, limitně se blížící nulové hodnotě, stejně jako výchylka tlumených kmitů.
Přitom úbytek celkové energie tlumeného oscilátoru za jednotku času můžeme lehce vypočítat jako časovou derivaci této funkce :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \omega_1^2 A^2 \cdot e^{-2b.t}\right) = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A^2 \cdot e^{-2b.t} \cdot (-2b) = -2b \cdot W$$

Během jedné periody kmitů tedy dojde ke ztrátě energie o (kladné) velikosti :

$$W_1 = \left|\frac{dW}{dt}\right| \cdot T_1 = 2b \cdot W \cdot T_1 = \frac{2b \cdot W \cdot 2\pi}{\omega_1} = \frac{4\pi b \cdot W}{\omega_1}$$

Namísto této veličiny se ale úbytek energie tlumených kmitů většinou charakterizuje relativní veličinou ***kvalita oscilátoru*** (quality factor) $\boldsymbol{Q}$, která se definuje jako 2π – násobek podílu střední hodnoty celkové energie oscilátoru (v jedné periodě kmitů) a ztráty této energie během jedné periody kmitů :

$$\boxed{Q = 2\pi \cdot \frac{W_{stř}}{W_1}}$$

kvalita oscilátoru

Po dosazení z předchozí rovnice dostaneme :

$$Q = 2\pi \cdot \frac{W_{stř}}{W_1} = 2\pi \cdot \frac{W_{stř} \cdot \omega_1}{4\pi b \cdot W} = \frac{\omega_1}{2b} \cdot \frac{W_{stř}}{W}$$

Velký praktický význam, zejména v elektronice, má případ ***velmi malého tlumení*** , kdy konstanta tlumení je daleko menší než vlastní frekvence oscilátoru :

$$\boxed{b \ll \omega}$$

velmi malé tlumení

V tomto případě během jedné periody se amplituda kmitů a tedy i energie zmenší jen nepatrně a proto střední hodnota energie během této periody je přibližně rovna okamžité energii (v kterémkoliv místě periody) :

$$W_{stř} \cong W$$

A stejně tak frekvence nucených kmitů je přibližně rovna vlastní frekvenci oscilátoru :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2} \cong \omega$$

Potom ovšem bude :

$$Q = \frac{\omega_1}{2b} \cdot \frac{W_{stř}}{W} = \frac{\omega}{2b} \cdot \frac{W}{W} = \frac{\omega}{2b}$$

A pro kvalitu oscilátoru tedy dostáváme velmi jednoduchý vztah, který obsahuje pouze základní koeficienty z pohybové rovnice :

$$\boxed{Q = \frac{\omega}{2b}}$$

kvalita oscilátoru (při velmi malém tlumení)

Je zřejmé, že kvalita oscilátoru je potom velmi vysoká :

$$Q = \frac{\omega}{2b} \gg 1$$

A je také dobře vidět rozumný smysl této veličiny : **oscilátor s vysokou kvalitou** Q - musí mít (při dané frekvenci) malou konstantu tlumení b - jeho amplituda tedy bude s časem klesat jen velmi pomalu – a proto takový oscilátor **vydrží kmitat velmi dlouhou dobu** , než se utlumí.

2) **případ silného tlumení (b > ω)**

Nyní je pod odmocninou kladný výraz a kořeny charakteristické rovnice jsou tedy reálné a oba dva jsou zřejmě záporné:

$$\alpha_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2} \quad < \quad 0$$

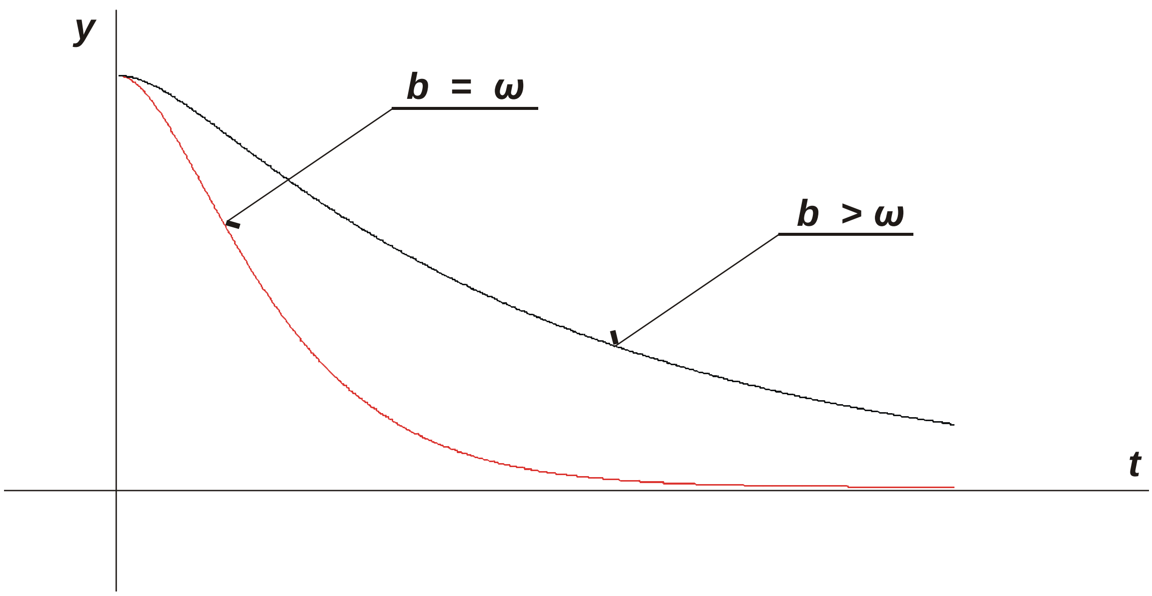
A obecné řešení je potom také reálným výrazem :

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{\alpha_1 .t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 .t}}$$

silné tlumení

Tato funkce jako superpozice (součet) dvou **záporných exponenciel** je monotónně klesající a asymptoticky se blíží nulové hodnotě (viz obr.).

Vychýlíme-li tedy silně tlumený oscilátor, vrací se zvolna zpět do rovnovážné polohy, aniž by překmitnul do opačné výchylky. Takový pohyb se nazývá ***aperiodický*** .



Pozn. : Pro grafické znázornění kmitů určíme opět integrační konstanty, nyní to jsou konstanty C_1 a C_2 , pomocí stejných okrajových podmínek jako u malého tlumení (tj. jednotková počáteční výchylka hmotného bodu a jeho nulová počáteční rychlost), které dosadíme do obecné rovnice pro výchylku a do z ní vypočítaného vztahu pro rychlost :

$$y = C_1 \cdot e^{\alpha_1 .t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 .t}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = C_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 .t} + C_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{\alpha_2 .t}$$

Tak dostaneme :

$$y_o = 1 = C_1 \cdot e^{\alpha_1 .0} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 .0} = C_1 + C_2$$

$$v_o = 0 = C_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 .0} + C_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{\alpha_2 .0} = C_1 \cdot \alpha_1 + C_2 \cdot \alpha_2$$

Řešení těchto dvou rovnic je :

$$C_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$C_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

Dostáváme tak konkrétní vztah pro výchylku, do kterého pak dosadíme zvolenou konstantu útlumu a vlastní úhlovou frekvenci (jsou obsažené v konstantách C_1 a C_2, viz výše) :

$$\boxed{y = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot e^{\alpha_1 . t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot e^{\alpha_2 . t}}$$

Pro výpočet křivky v uvedeném grafu byl použit poměr $b : \omega = 10 : 8$.

Pro zajímavost můžeme ještě zhodnotit extrémní (limitní) případ velmi silného tlumení, kdy by konstanta útlumu byla nesrovnatelně větší než úhlová frekvence (b >> ω) - a kdy by tedy platilo :

$$\alpha_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega^2} \approx 0$$

$$\alpha_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega^2} \approx -2 \cdot b$$

Pak by integrační konstanty měly velikost :

$$C_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{-(-2b)}{0 - (-2b)} = 1$$

$$C_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{0}{0 - (-2b)} = 0$$

A výchylka hmotného bodu by prakticky zůstávala na počáteční hodnotě :

$$y = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot e^{\alpha_1 . t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot e^{\alpha_2 . t} \approx 1 \cdot e^{0.t} + 0 \cdot e^{-2b.t} = 1$$

Velmi silné brzdicí síly by tedy nedovolily návrat hmotného bodu do nulové polohy (v konečném čase).

3) **mezní případ tlumení (b = ω)**

Za těchto podmínek existuje jediný kořen charakteristické rovnice :

$$\alpha_{1,2} = -b$$

A dostaneme tedy jediné partikulární řešení :

$$y = C \cdot e^{-b.t}$$

Druhé nezávislé partikulární řešení pak muselo být nalezeno zcela jiným matematickým postupem - uvedeme zde pouze výsledek :

$$y = C \cdot t \cdot e^{-b.t}$$

Lineární kombinací těchto výrazů pak opět vytvoříme obecné řešení diferenciální rovnice pro případ mezního tlumení :

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{-b.t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-b.t} = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-b.t}}$$

mezní tlumení

Výchylka nemění znaménko, pohyb je opět aperiodický, funkce však **klesá k nule nejrychlejším** možným způsobem, jde o tzv. ***mezní aperiodický pohyb*** (viz obr.).

Je to případ nejdokonalejšího tlumení kmitavého pohybu.

Pozn. : Pro grafické znázornění kmitů určíme opět integrační konstanty C_1 a C_2 , pomocí stejných okrajových podmínek jako u malého tlumení, tj. jednotková počáteční výchylka hmotného bodu a jeho nulová počáteční rychlost, které dosadíme do obecné rovnice pro výchylku a do z ní vypočítaného vztahu pro rychlost :

$$y = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-b.t}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot (-b) \cdot e^{-b.t} + C_2 \cdot e^{-b.t} = \left(C_2 - b \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) \right) \cdot e^{-b.t}$$

Tak dostaneme opět dvě rovnice, pro počáteční výchylku :

$$y_o = 1 = (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot e^{-b.0} = C_1$$

A pro počáteční rychlost :

$$v_o = 0 = \left(C_2 - b \cdot (C_1 + C_2 \cdot 0) \right) \cdot e^{-b.0} = C_2 - b \cdot C_1$$

Řešení těchto dvou rovnic je :

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = b \cdot C_1 = b$$

Konkrétní vztah pro výchylku, znázorněnou na obrázku, je tedy :

$$\boxed{y = (1 + b) \cdot e^{-b.t}}$$

Z obrázku vidíme, že zmenšení konstanty tlumení z původní již relativně dosti malé hodnoty $b = 10 / 8 \cdot \omega$ na hodnotu právě rovnou vlastní úhlové frekvenci , tj. $b = \omega$, skutečně vede k výrazně rychlejšímu poklesu výchylky.

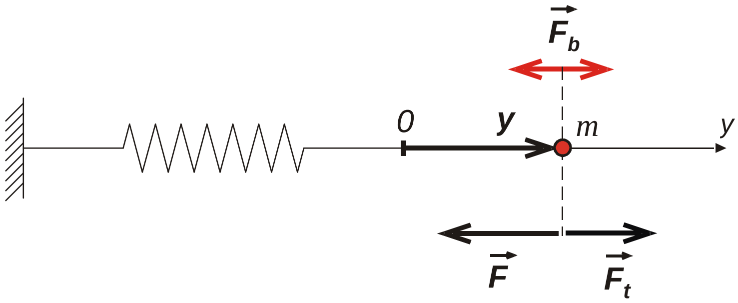
Další zmenšení brzdicích sil by pak již způsobilo překmit výchylky na druhou stranu - a tedy by došlo ke vzniku kmitavého pohybu podle bodu 1).

(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 01/2005, rev. 04/2006,**

02/2008 – vzorová řešení pohybové rovnice pro všechny tři případy kmitů, určení integračních konstant, nové grafy, výpočet celkové energie oscilátoru, zavedení útlumu, log. dekrementu a kvality oscilátoru

Nucené kmity

Se zmenšováním amplitudy v předchozím případě tlumených kmitů (při malém tlumení) klesá k nule také celková energie pohybu a za nějaký čas kmity vymizí . Mají-li se tedy tlumené kmity udržet, je nutné ztracenou energii doplňovat prací vnější síly . To je případ ***buzeného harmonického oscilátoru*** .



Pro dosažení konstantní výsledné amplitudy kmitů je zřejmě nutné nepřerušované průběžné působení síly, spojitě sledující pohyb hmotného bodu, průběh síly musí tedy být periodický. Nejjednodušší taková budicí síla bude mít sinusový průběh s úhlovou frekvencí Ω

$$\boxed{F_b = F_o \cdot \sin \Omega\, t}$$

harmonická budicí síla

Přidáme-li tuto sílu k pružné síle a k viskózní třecí síle, vznikne pohybová rovnice :

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \cdot y - B \cdot \frac{dy}{dt} + F_o \cdot \sin \Omega\, t$$

Po analogických úpravách jako u tlumeného oscilátoru :

$$\ddot{y} + \frac{B}{m} \cdot \dot{y} + \frac{k}{m} \cdot y = \frac{F_o}{m} \cdot \sin \Omega\, t$$

Zavedeme-li dále v rovnici také stejné konstanty jako u tlumeného oscilátoru :

$$\boxed{\frac{k}{m} = \omega^2}$$

vlastní úhlová frekvence

$$\boxed{\frac{B}{m} = 2b}$$

konstanta útlumu

Dostaneme tak konečný tvar rovnice :

$$\boxed{\ddot{y} + 2b\,\dot{y} + \omega^2 y = \frac{F_o}{m} \cdot \sin \Omega\, t}$$

pohybová rovnice nucených kmitů

Kromě pravé strany je tato rovnice shodná s diferenciální rovnicí tlumených kmitů - je to tzv. ***nehomogenní diferenciální rovnice*** . Připomeňme si opět matematické znalosti : obecné řešení takové rovnice se skládá z obecného řešení příslušné homogenní diferenciální rovnice a z jednoho partikulárního řešení nehomogenní rovnice.

Obecné řešení homogenní (bez pravé strany) diferenciální rovnice již známe , je to rovnice tlumených kmitů (budeme uvažovat jen malé tlumení, jinak by vlastně nešlo o kmity).

Partikulární řešení nehomogenní rovnice (s pravou stranou) se často hledá zkusmo. V tomto případě je však i fyzikální důvod (viz níže) pro řešení ve tvaru :

$$\boxed{y = A \cdot sin(\Omega\, t + \Phi_o)}$$

partikulární řešení

Obecné řešení nucených kmitů při malém tlumení bude mít tedy tvar :

$$\boxed{y = C \cdot e^{-b.t} \cdot sin(\omega_1 t + \varphi_o) + A \cdot sin(\Omega\, t + \Phi_o)}$$

obecné řešení nuc. kmitů

Dvě části řešení jsou vlastně důsledkem dvou vlivů na pohyb hmotného bodu : prvním je spolupůsobení třecí a pružné síly - důsledkem jsou tlumené kmity , vyjádřené prvním členem řešení. Průběh těchto kmitů dobře známe a víme, že po nějaké době (tzv. přechodový stav) prakticky vymizí.

Pak zůstane nenulový pouze druhý člen (partikulární řešení), který je způsoben druhým vlivem - budicí silou (protože obsahuje její parametr Ω). Vidíme, že jde o harmonický kmitavý pohyb stejné frekvence jako má budicí síla (ne však stejné amplitudy a fáze).

Obecné řešení v ustáleném stavu je tedy určeno pouze partikulárním řešením diferenciální rovnice :

$$\boxed{y = A \cdot sin(\Omega\, t + \Phi_o)}$$

nucené kmity v ustáleném stavu

Veličiny A a Φ_o jsou vlastně integračními konstantami partikulárního řešení a musí být nalezeny tak, aby toto řešení vyhovělo úplné nehomogenní diferenciální rovnici – dosadíme ho tedy do této rovnice :

Potřebujeme nejprve jeho derivaci :

$$\frac{dy}{dt} = A \cdot \Omega \cdot cos(\Omega\, t + \Phi_o)$$

A ještě druhou derivaci :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -A \cdot \Omega^2 \cdot sin(\Omega\, t + \Phi_o)$$

A nyní můžeme dosadit do pohybové rovnice :

$$-A\Omega^2\, sin(\Omega\, t + \Phi_o) + 2bA\Omega\, cos(\Omega\, t + \Phi_o) + A\omega^2\, sin(\Omega\, t + \Phi_o) = \frac{F_o}{m} \cdot sin\, \Omega\, t$$

Rovnost levé a pravé strany rovnice znamená vlastně rovnost dvou funkcí času, která musí být splněna pro libovolnou hodnotu proměnné t . Pro naše dvě neznámé A a Φ_o potřebujeme vytvořit dvě „obyčejné“ - nečasové rovnice. Dosadíme tedy postupně dva různé konkrétní časy :

$\boxed{t = -\dfrac{\Phi_o}{\Omega}}$ ……….... potom bude $\Omega\, t + \Phi_o = 0$ a také $\Omega\, t = -\Phi_o$

$\boxed{t = -\dfrac{\Phi_o}{\Omega} + \dfrac{\pi}{2\cdot\Omega}}$ …. potom bude $\Omega\, t + \Phi_o = \dfrac{\pi}{2}$ a také $\Omega\, t = \dfrac{\pi}{2} - \Phi_o$

A vzniknou tak dvě rovnice pro dvě neznámé :

$$-A\Omega^2 \sin(0) + 2bA\Omega \cos(0) + A\omega^2 \sin(0) = \frac{F_o}{m} \cdot \sin(-\Phi_o)$$

$$-A\Omega^2 \sin(\frac{\pi}{2}) + 2bA\Omega \cos(\frac{\pi}{2}) + A\omega^2 \sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{F_o}{m} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - \Phi_o)$$

Rovnice upravíme pomocí známých hodnot trigonometrických funkcí :

$$2bA\Omega = -\frac{F_o}{m} \cdot \sin\Phi_o$$

$$-A\Omega^2 + A\omega^2 = \frac{F_o}{m} \cdot \cos\Phi_o$$

Jestliže pak první rovnici vydělíme rovnicí druhou, vykrátí se amplituda A a dostaneme ihned vztah pro fázovou konstantu Φ_o (viz dále).

K nalezení druhé neznámé A ještě umocníme obě rovnice na druhou a sečteme :

$$(2bA\Omega)^2 + \left(-A\Omega^2 + A\omega^2\right)^2 = (-1)^2 \cdot \left(\frac{F_o}{m}\right)^2 \cdot \sin^2\Phi_o + \left(\frac{F_o}{m}\right)^2 \cdot \cos^2\Phi_o$$

Na levé i pravé straně můžeme provést vytknutí :

$$A^2 \cdot \left((2b\Omega)^2 + (-\Omega^2 + \omega^2)^2\right) = \left(\frac{F_o}{m}\right)^2 \cdot \left(\sin^2\Phi_o + \cos^2\Phi_o\right)$$

Nalevo umocníme dvojčlen a na straně pravé použijeme vztah pro součet kvadrátu sinu a kosinu :

$$A^2 \cdot \left(4b^2\Omega^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2\right) = \left(\frac{F_o}{m}\right)^2 \cdot 1$$

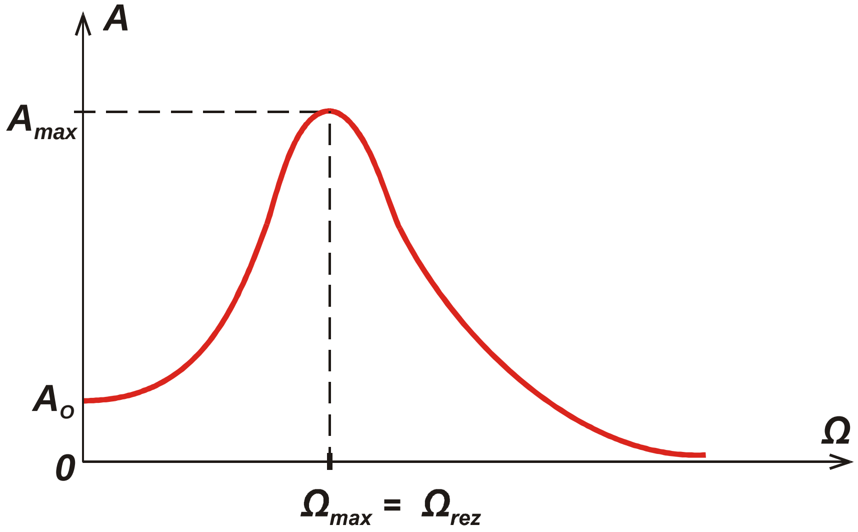
Rovnici nakonec odmocníme a tak pro amplitudu nucených kmitů (a pro jejich fázový posuv oproti kmitům budicí síly) dostáváme vztahy :

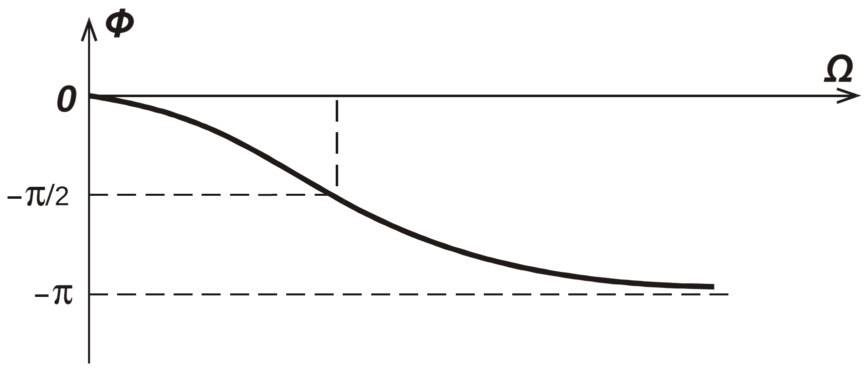
$$\boxed{A = \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}}} \qquad \boxed{tg\Phi_o = -\frac{2b\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}}$$

Povšimněte si v následujících grafech obou těchto funkcí :

$\boxed{A = A(\Omega)}$ $\boxed{\Phi = \Phi(\Omega)}$

zejména <u>závislosti amplitudy nucených kmitů na frekvenci budicí síly</u> - tzv. ***<u>rezonanční křivka</u>*** :





Rezonanční křivka začíná na nenulové počáteční hodnotě A_o , což je vlastně amplituda při <u>nulové</u> frekvenci Ω – jinak řečeno je to maximální výchylka A_o (hmotného bodu na pružině tuhosti k) při <u>nekonečně pomalém</u> nárůstu vnější budicí síly - až do jejího maxima F_o . Je jasné, že přitom musí platit pro pružinu (pro pružnou sílu) rovnice :

$$F_o = k \cdot A_o$$

Když si představíme, že bychom nataženou pružinu s hmotným bodem v této maximální výchylce uvolnili (od budicí síly, i od síly třecí) - pak by se hmotný bod zřejmě rozkmital netlumenými kmity, které by měly vlastní frekvenci ω a právě tuto amplitudu A_o (stačí uvážit zachování energie kmitů).

Počáteční amplituda rezonanční křivky se tedy také rovna ***amplitudě vlastních kmitů*** oscilátoru (tj. kmitů našeho hmotného bodu na dané pružině, bez působení tlumicí i budicí síly) :

$$\boxed{A_o(\Omega = 0) = \frac{F_o}{k}}$$

počáteční amplituda = amplituda vlastních kmitů

Stejný výraz bychom samozřejmě měli také dostat přímým dosazením nulové budicí frekvence Ω do obecného vztahu pro amplitudu nucených kmitů (zkuste sami).

Z tohoto vztahu je také ihned vidět, že pro velmi vysoké frekvence budicí síly ($\Omega \to \infty$) klesá amplituda limitně až k nule - tj. kmity zanikají (pro jakkoliv vysokou budicí sílu a při nenulovém tlumení, jde vlastně o minimum rezonanční křivky).

Název „rezonanční křivka“ pak souvisí s ***jevem rezonance*** , který typicky nastává u nucených kmitů a který je charakterizován silným nárůstem amplitudy kmitů a vznikem výrazného maxima při určité hodnotě frekvence budicí síly – je to tzv. ***rezonanční frekvence*** Ω_{rez} .

Tuto velmi důležitou veličinu stanovíme dále standardním matematickým postupem pro hledání extrému funkce :

$$\boxed{\frac{dA}{d\Omega} = 0}$$

Z důvodu konstantního čitatele a monotónní funkce ve jmenovateli (odmocnina) postačí ovšem derivovat pouze výraz pod odmocninou:

$$-4\Omega(\omega^2 - \Omega^2) + 8b^2\Omega = 0$$

Vyloučíme-li $\Omega = 0$ (to jistě není hledané maximum), dostaneme :

$$-\omega^2 + \Omega^2 + 2b^2 = 0$$

Druhé, nenulové řešení je tedy :

$$\boxed{\Omega_{max} = \Omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2b^2}}$$

rezonanční frekvence

Maximální hodnotu amplitudy pak lehce získáme dosazením této frekvence do obecného vztahu pro amplitudu :

$$A = \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega_{rez}^2)^2 + 4b^2 \Omega_{rez}^2}} = \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - (\omega^2 - 2b^2))^2 + 4b^2(\omega^2 - 2b^2)}}$$

Provedeme-li matematické úkony ve výrazu pod odmocninou a použijeme-li ještě vztah pro úhlovou frekvenci tlumených kmitů :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2}$$

dostaneme nakonec velmi jednoduchý výraz :

$$\boxed{A_{max} = \frac{F_o}{2\,m\,b\,\omega_1}}$$

maximum amplitudové rezonance

Při zkoumání nucených kmitů se - podobně jako u kmitů tlumených - často používá veličina kvalita oscilátoru Q, která charakterizuje úbytek energie kmitů (je definována jako 2π – násobek podílu střední hodnoty celkové energie oscilátoru v jedné periodě kmitů a ztráty této energie během jedné periody kmitů, viz minulá kapitola „Tlumené kmity“) :

$$\boxed{Q = 2\pi \cdot \frac{W_{stř}}{W_1}}$$

kvalita oscilátoru

Jev rezonance má velký význam zejména za podmínek velmi malého tlumení , kdy konstanta tlumení je značně menší než vlastní frekvence oscilátoru (takové jsou většinou elektrické rezonanční LCR obvody) :

$$\boxed{b \ll \omega}$$

velmi malé tlumení

V tomto případě je rezonanční frekvence prakticky rovná vlastní frekvenci oscilátoru :

$$\boxed{\Omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - 2b^2} \cong \omega}$$

A stejně tak frekvence nucených kmitů :

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2} \cong \omega}$$

Kvalita oscilátoru je pak za těchto podmínek velmi vysoká a lze pro ni odvodit jednoduchý vzorec (viz opět minulou kapitolu) :

$$\boxed{Q = \frac{\omega}{2b} >> 1}$$

kvalita oscilátoru *(při velmi malém tlumení)*

A pro maximální amplitudu kmitů při rezonanci můžeme potom psát (a provedeme malou úpravu) :

$$A_{max} = \frac{F_o}{2mb\omega_1} \cong \frac{F_o}{2mb\omega} = \frac{F_o}{m\omega^2} \cdot \frac{\omega}{2b} = \frac{F_o}{m\omega^2} \cdot Q$$

Dosadíme-li za vlastní úhlovou frekvenci její definiční vztah :

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

vznikne na pravé straně ještě počáteční amplituda (viz výše její definiční vztah) a celkem tak obdržíme velmi jednoduchý a velmi zásadní vztah :

$$\boxed{A_{max} = A_o \cdot Q}$$

maximum amplitudové rezonance

Při rezonanční frekvenci *(která se přibližně rovná vlastní frekvenci oscilátoru)* ***dojde tedy při vnějším buzení ke Q– násobnému zesílení amplitudy vlastních kmitů oscilátoru.***

Za velmi malého tlumení (tedy pro vysoké Q) je rezonanční jev navíc velmi „ostrý“ - tj. amplitudové **maximum je velmi úzké** - jeho ***pološířka*** $\Delta\Omega$ (šířka křivky maxima v polovině jeho výšky) je nepřímo úměrná hodnotě kvality Q :

$$\boxed{\Delta\,\Omega \approx \frac{1}{Q}}$$

Potom tedy při postupně rostoucí frekvenci budicí síly (např. postupné zvyšování otáček motoru) amplituda kmitů roste nejprve jen zvolna, ale pak velmi náhle - při malé změně frekvence (v malém frekvenčním intervalu) - nastane rychlý nárůst amplitudy do jejího maxima.

Využití amplitudové rezonance : V elektrických rezonančních obvodech při vysoké kvalitě oscilátor přesně „ najde, vybere a zesílí “ kmity své rezonanční frekvence – a to z celého spektra frekvencí, které jsou na něj přivedeny, například z antény (to je vstupní obvod nějakého přijímače, změnou jeho rezonanční frekvence pak probíhá „ladění“ přijímače).

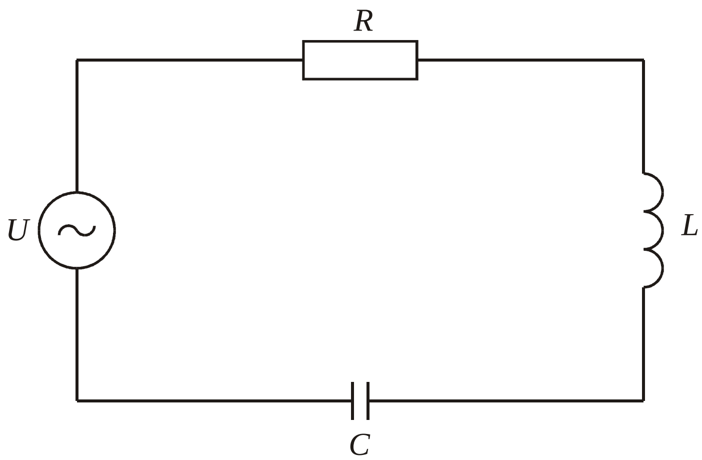
Je to také nežádoucí jev : rezonance strojních součástí (kritické otáčky hřídele), rezonance staveb (viz účinek hlasité hudby na hradby Jericha …… a proč se asi používá známý povel „zrušit krok“ pro pochodový útvar na mostě ?)

Příklad aplikace : ***oscilační sériový obvod LCR*** s vnějším budicím střídavým zdrojem (viz obr.) :

$$U = U_m \cdot \sin \Omega . t$$

Nebo pro dosažení zcela identické výsledné rovnice lze předpokládat :

$$U = U_m \cdot \sin(\Omega\, t + \frac{\pi}{2})$$



Podle 2. Kirchhofova zákona potom platí (Q je náboj na kondenzátoru) :

$$R \cdot I = U_m \cdot \sin(\Omega\, t + \frac{\pi}{2}) - L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}$$

Rovnici derivujeme podle času :

$$R \cdot \frac{dI}{dt} = U_m \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega\, t + \frac{\pi}{2}) - L \cdot \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot \frac{dQ}{dt}$$

Ještě využijeme definici proudu jako náboje přeneseného (průřezem vodiče) za jednotku času a jeho souvislosti s přírůstkem náboje na kondenzátoru :

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

A po jednoduchých úpravách rovnice dostaneme :

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \cdot \dot{I} + \frac{1}{LC} \cdot I = \frac{U_m \cdot \Omega}{L} \cdot \sin \Omega . t$$

Pro elektrický proud v obvodu tedy platí formálně shodná rovnice jako pro mechanické nucené kmity. Pro konstanty tak dostáváme :

$$\boxed{\frac{R}{L} = 2b} \qquad \boxed{\frac{1}{LC} = \omega^2} \qquad \boxed{\frac{U_m \cdot \Omega}{L} = \frac{F_o}{m}}$$

Matematický vztah pro elektrický proud v ustáleném stavu bude proto také stejný jako pro výchylku mechanických kmitů :

$$I = I_m \cdot \sin(\Omega t + \Phi_o)$$

A jeho amplitudu vypočítáme ze vztahu pro amplitudu mechanických kmitů :

$$I_m = \frac{F_o}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}} = \frac{U_m \Omega}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \Omega^2)^2 + (\frac{R}{L})^2 \Omega^2}}$$

Dostaneme tak známý vztah - ***Ohmův zákon pro střídavý obvod*** :

$$\boxed{I_m = \frac{U_m}{\sqrt{(\frac{1}{\Omega.C} - \Omega.L)^2 + R^2}}}$$

Pro fázový posuv pak bude platit :

$$tg\Phi_o = -\frac{2b\omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{\Omega.L - \frac{1}{\Omega.C}}{R}$$

Z těchto rovnic tedy vyplývají všechny známé vztahy pro impedance a fázové posuvy ve střídavých obvodech, včetně rezonanční frekvence a kvality oscilátoru.

(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 01/2005, rev. 04/2006, 02/2007, 04/2008**

Skládání rovnoběžných kmitů

Principiálně se nejedná o žádný nový problém, ať jsou kmity rovnoběžné, nebo různoběžné (viz další kapitola), vždy vlastně jde o obyčejné ***skládání mechanických pohybů*** , které je běžné v technické praxi a často užívané ve školních příkladech (plavec plave přes řeku, vrh svislý a šikmý, pohyb po spirále, …).

Uvědomme si, že podle 2. Newtonova zákona je každý pohyb důsledkem určité působící síly a podle ***principu superpozice*** jsou všechny pohyby, které chceme skládat, vzájemně zcela nezávislé .

Proto tedy můžeme každý jednotlivý (dílčí) pohyb vypočítat zcela samostatně, pouze z pohybové rovnice s příslušnou silou (která ho způsobuje) - a závěrem pak všechny dílčí pohyby v libovolném pořadí složíme (sečteme).

Nyní si tedy představme určitou modelovou situaci, kdy na jediný hmotný bod působí dvě nezávislé pružné síly ve stejném směru (osy y). Předpokládejme obecně různé síly, tj. s různými konstantami pružnosti :

$$F_1 = -k_1 \cdot y$$
$$F_2 = -k_2 \cdot y$$

Výsledkem samostatného působení každé této síly na hmotný bod jsou potom kmity obecně vzájemně odlišných vlastností :

$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Kde pro úhlové frekvence platí standardní výrazy :

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m} \qquad\qquad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m}$$

V tomto jednoduchém případě dvou jednorozměrných pohybů v jedné ose, získáme ***výsledný pohyb*** prostým **skalárním součtem** obou jednotlivých výchylek hmotného bodu - a bude to opět jednorozměrný pohyb ve stejné ose (y) :

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

Hlavním parametrem, který rozhodne o konkrétním výsledku tohoto součtu, je frekvence obou dílčích kmitů. Rozlišíme proto dva zásadní případy :

1) **Skládání rovnoběžných kmitů stejné frekvence**

V tomto případě tedy bude :

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

Výchozí kmity jsou potom popsány rovnicemi :

$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

A pro výsledný pohyb platí rovnice :

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)}$$

Jde zřejmě o nejjednodušší možný případ skládání rovnoběžných kmitů. Již při diskusi pohybové rovnice harmonického oscilátoru jsme došli k závěru, že součtem dvou sinusovek stejné frekvence je opět sinusovka nezměněné frekvence (má ale jinou amplitudu a fázovou konstantu).

Použijeme tedy opakovaně součtové vzorce :

$$\begin{aligned} y &= A_1 (\sin\omega t \cdot \cos\varphi_1 + \cos\omega t \cdot \sin\varphi_1) + A_2 (\sin\omega t \cdot \cos\varphi_2 + \cos\omega t \cdot \sin\varphi_2) = \\ &= \sin\omega t \cdot (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 .) + \cos\omega t \cdot (A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2) = \\ &= \sin\omega t \cdot A\cos\varphi + \cos\omega t \cdot A\sin\varphi = \\ &= A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Výpočet tak potvrzuje, že **výsledný pohyb je skutečně opět harmonickým pohybem** stejné frekvence jako výchozí kmity. Jeho amplituda a fázová konstanta jsou určeny dvěma vztahy, které jsme použili při výpočtu (viz výše) :

$$A\cos\varphi = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2$$
$$A\sin\varphi = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2$$

Dostáváme dvě rovnice pro dvě neznámé (A, φ), jejich vyřešení se ale nebudeme věnovat. Je zřejmé, že používání goniometrických funkcí s reálnými výchylkami vede k cíli poněkud těžkopádnou cestou.

Ukažme si dále, jak naopak **použití komplexních funkcí** při skládání kmitů je velmi jednoduché a elegantní :

Nejprve oběma jednotlivým kmitům přiřadíme ***komplexní tvary*** (komplexní funkce) :

$$\hat{u}_1 = A_1 \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t + \varphi_1)} = A_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = \hat{A}_1 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$$
$$\hat{u}_2 = A_2 \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t + \varphi_2)} = A_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2} \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = \hat{A}_2 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}$$

Potom ***komplexní tvar výsledných kmitů*** bude jejich součtem :

$$\boxed{\hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 = \hat{A}_1 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} + \hat{A}_2 \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t} = (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) \cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}}$$

Vidíme, že právě **stejná frekvence** kmitů umožňuje vytknutí exponenciely a sečtení obou komplexních amplitud do výsledného komplexního čísla - které opět - jako každé komplexní číslo - může být zapsáno ve tvaru komplexní amplitudy, obsahující (nyní skalární) amplitudu výsledných kmitů A a jejich fázovou konstantu φ :

$$\boxed{\hat{u} = (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = \hat{A} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} = A \cdot e^{i \cdot \varphi} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}}$$

Vzniklý standardní tvar komplexního zápisu kmitů tedy opakovaně a velmi jednoduše dokazuje, že **výsledné kmity jsou opět harmonické se stejnou frekvencí** jako oba původní kmity.

Přitom ***výsledná komplexní amplituda je součtem obou počátečních komplexních amplitud*** :

$$\boxed{\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2}$$

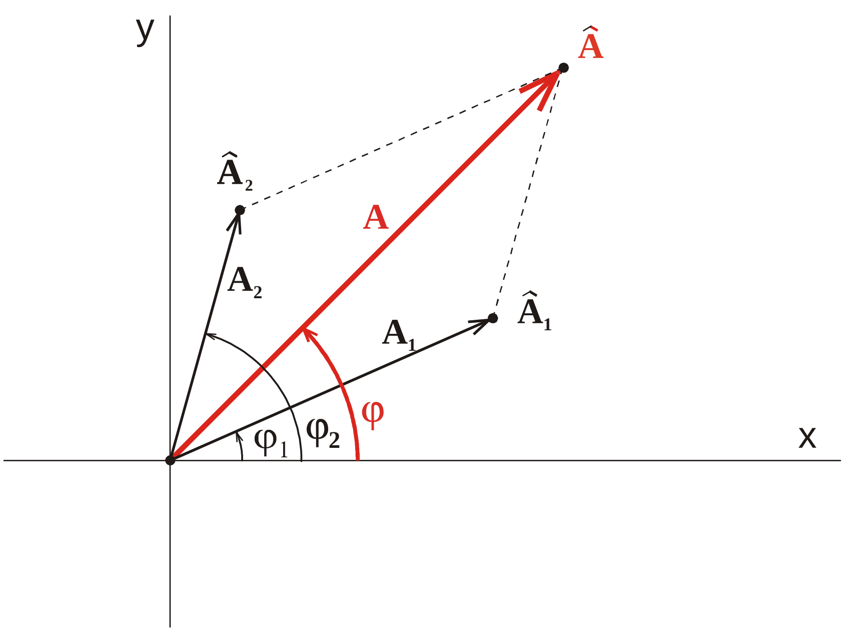
výsledná komplexní amplituda

To znamená, že výslednou amplitudu a fázovou konstantu relativně jednoduše vypočítáme z hodnot těchto veličin u počátečních výchozích kmitů :

$$\boxed{A \cdot e^{i \cdot \varphi} = A_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1} + A_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}}$$

výsledná komplexní amplituda

Sčítání komplexních čísel samozřejmě znamená standardní sečtení jejich reálných a imaginárních částí. V tomto případě komplexních exponenciel je možno také s výhodou použít jejich ***grafické znázornění*** a ***sečtení jako vektorů*** , neboť amplituda kmitů je absolutní hodnotou komplexního čísla (délkou úsečky, vektoru) a fázová konstanta je jeho argumentem (úhlem, který vektor svírá s osou x) :



Amplitudu výsledných kmitů je pak možno jednoduše odečíst z grafu jako délku výsledného vektoru, nebo ji lze také vypočítat pomocí kosinové věty :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Ze vztahu vidíme výraznou závislost výsledné amplitudy na rozdílu fázových konstant kmitů, tj. na fázovém rozdílu obou kmitů :

$$\boxed{\varphi_2 - \varphi_1}$$ ***fázový rozdíl kmitů***

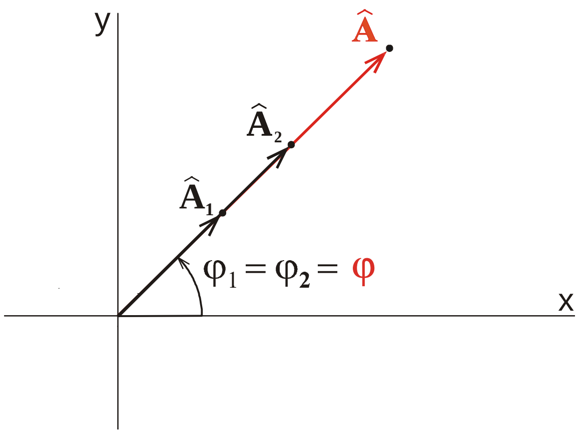
Použití komplexních amplitud ve spojení s grafickou metodou umožňuje tedy velmi rychlé stanovení výsledných parametrů kmitů, tj. výsledné (skalární) amplitudy A a výsledné fázové konstanty φ.

Použití komplexních amplitud je také velmi výhodné pro řešení následujícího problému :

Maximum a minimum výsledné amplitudy :

Zejména v technických aplikacích jsou důležité extrémní výsledné pohybové stavy, tj. stavy s maximální, nebo minimální amplitudou kmitů (u mechanických konstrukcí z toho plyne maximální, nebo minimální namáhání materiálu , v elektrických obvodech jde o zesílení, nebo zeslabení výsledného signálu, je to také princip činnost mnoha interferenčních a difrakčních přístrojů, atd.).

Právě z grafického znázornění komplexních amplitud je ihned jasné, že pro ***maximální*** výslednou amplitudu musí být oba počáteční vektory souhlasně rovnoběžné, tj. musí platit (viz obr.) :



$$\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$$

Nebo jinak :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0$$

Dostáváme podmínku pro fázový rozdíl obou kmitů. Připustíme-li obecně jeho libovolnou velikost, můžeme zobecnit :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0 \pm n.2\pi$$ n = 0,1,2,3… (celé číslo)

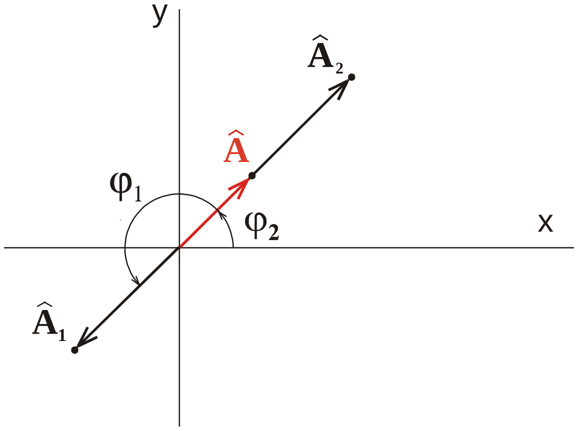
Nebo v nejjednodušším tvaru :

$$\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2n\pi}$$

podmínka maxima

Slovně : *Fázový rozdíl obou kmitů je roven sudému násobku čísla π, kmity jsou tedy „ve fázi“.*

Stejně lehce vidíme z grafu podmínku ***minimální*** amplitudy - počáteční vektory musí být nesouhlasně rovnoběžné :



$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi \pm n.2\pi$$

A tedy v konečném tvaru :

$$\boxed{\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2n+1)\pi}$$

podmínka minima

Slovně : *Fázový rozdíl kmitů je roven lichému násobku čísla π, kmity jsou tedy „v protifázi“.*

Poznámka k oběma podmínkám : Znak „plus mínus“ v obou vztazích zdůrazňuje, že nezáleží na kladné, či záporné hodnotě fázového rozdílu. Pokud definujeme číslo n jako celé, kladné i záporné, můžeme také tento znak vypustit, nebo lze použít na levé straně rovnic absolutní hodnotu fázového rozdílu.

.

2) **Skládání rovnoběžných kmitů různé frekvence**

Výchozí kmity mají tedy různé frekvence, obecně i amplitudy a fázové konstanty :

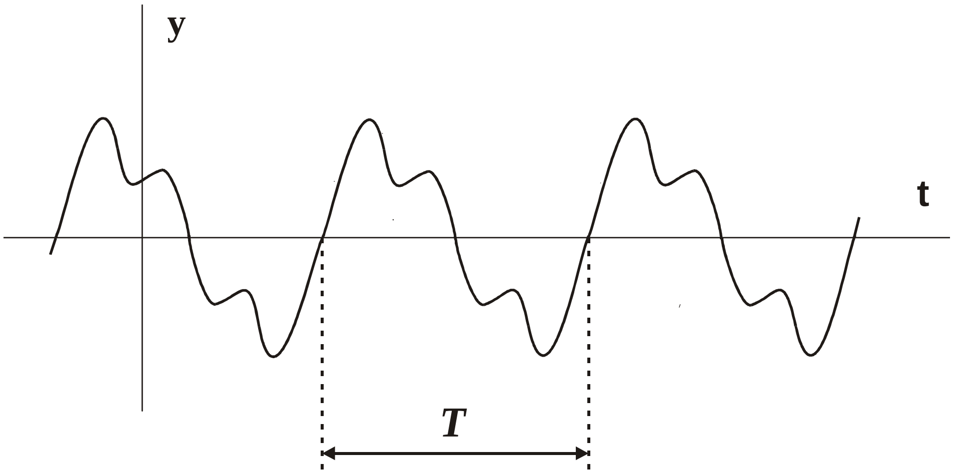
$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

A výsledný pohyb je opět jejich součtem :

$$\boxed{y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

Na rozdíl od předchozích kmitů stejné frekvence tento součet nelze vyjádřit nějakou harmonickou funkcí, nelze ho ani převést na jinou analytickou funkci, dokonce obecně ***ani nejeví periodičnost*** .

Tato vlastnost je u kmitů dosti závažná, zjistíme tedy v dalších řádcích podmínky periodičnosti. Použijeme obecnou matematickou definici periody funkce jako (nejmenšího) intervalu nezávisle proměnné, po kterém se (vždy) opakuje hodnota funkce (a její průběh, viz obr.) :



Jestliže tedy funkce $y(t)$ má mít nějakou periodu *T*, musí zřejmě vždy platit :

$$y(t) = y(t+T)$$

Dosaďme sem naši funkci vytvořenou součtem kmitů různé frekvence :

$$A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2) =$$
$$= A_1 \cdot \sin(\omega_1 (t+T) + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 (t+T) + \varphi_2)$$

Jediná možnost zajištění periodičnosti u těchto komplikovaných průběhů je zřejmě rovnost sinusovek stejné frekvence na obou stranách rovnice, tj. :

$$A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 (t+T) + \varphi_1)$$
$$A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 (t+T) + \varphi_2)$$

Dostáváme rovnost funkcí o známé periodě (2π) . Rovnost periodické funkce pro dvě hodnoty nezávisle proměnné ovšem znamená, že tyto hodnoty se liší právě o periodu, nebo o její libovolný násobek. Z toho tedy plynou následující podmínky pro fáze uvedených sinusovek :

$$\omega_1 t + \varphi_1 = \omega_1 (t+T) + \varphi_1 + n_1 2\pi$$
$$\omega_2 t + \varphi_2 = \omega_2 (t+T) + \varphi_2 + n_2 2\pi$$

kde n_1 a n_2 jsou libovolná celá čísla

Po úpravě :

$$0 = \omega_1 T + n_1 2\pi$$

$$0 = \omega_2 T + n_2 2\pi$$

Členy s frekvencemi převedeme na levou stranu a obě rovnice vydělíme :

$$\frac{\omega_1 T}{\omega_2 T} = \frac{n_1 2\pi}{n_2 2\pi}$$

Vznikne tak jednoduchá podmínka periodičnosti :

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

podmínka periodičnosti

Úhlové frekvence výchozích kmitů musí být tedy v poměru libovolných celých čísel.

Toto konstatování můžeme samozřejmě vyslovit i pro jejich ***frekvence*** nebo ***periody*** , neboť platí známé vztahy :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2\pi f_1}{2\pi f_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{1/T_1}{1/T_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

Zdálo by se, že jsme pro kmity různé frekvence vyčerpali matematické možnosti jejich popisu. Ukázala se však možnost exaktního řešení následujícího speciálního případu :

3) Skládání rovnoběžných kmitů blízké frekvence

Zde jde vlastně o předchozí problém součtu kmitů různé frekvence , který byl v principu neřešitelný :

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Použijeme však přídavný předpoklad blízkých frekvencí obou kmitů, který se velmi často vyskytuje v technických i teoretických aplikacích (velmi zajímavé a principiální jevy vznikají při vzájemném působení mírně rozladěných oscilátorů (mechanických i elektronických, vzpomeňte také na nucené kmity) a zejména pak při interferenci vlnění blízkých frekvencí – vlnové grupy, spektrální analýza) :

$$\boxed{\omega_1 \neq \omega_2 \, , \qquad \omega_1 \rightarrow \omega_2}$$

Vzpomeňme ještě na minulý odstavec, že situace při skládání kmitů různé frekvence je velmi komplikovaná a zjednodušme dále tento problém předpokladem stejných amplitud a stejných fázových konstant , které v principu nemohou změnit výsledek „působení“ různých frekvencí :

$$A_1 = A_2 = A$$
$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

Pak totiž dostaneme jednodušší vztahy :

$$y = A \cdot \sin \omega_1 t + A \cdot \sin \omega_2 t = A \cdot (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t)$$

A není tedy problémem použití klasických součtových vzorců pro goniometrické funkce ($\sin\alpha + \sin\beta$) :

$$y = A (2 \cdot \sin \frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2} \cdot \cos \frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}) = 2A \cdot \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2) t}{2} \cdot \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2) t}{2}$$

Jestliže označíme :

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \omega_o$$

Pak lze jednoduše zapsat výsledek :

$$\boxed{y = 2A \cdot \cos \omega_o t \cdot \sin \omega t}$$

kmity blízké frekvence

Můžeme konstatovat, že výsledek skládání dvou kmitů blízké frekvence má složitý průběh – ***matematicky to nejsou harmonické kmity*** - ale protože zjevně platí :

$$\boxed{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega \approx \omega_1 \approx \omega_2}$$

$$\boxed{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \omega_o \to 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_o = \frac{1}{f_o} = \frac{2\pi}{\omega_o} \to \infty}$$

lze tento výsledek interpretovat jako ***přibližně harmonické*** kmity prakticky stejné frekvence jako výchozí kmity, s velmi **pomalu proměnnou sinusovou amplitudou** (protože perioda T_o je veliká)

$$\boxed{A' = 2A \cdot \cos \omega_o t}$$

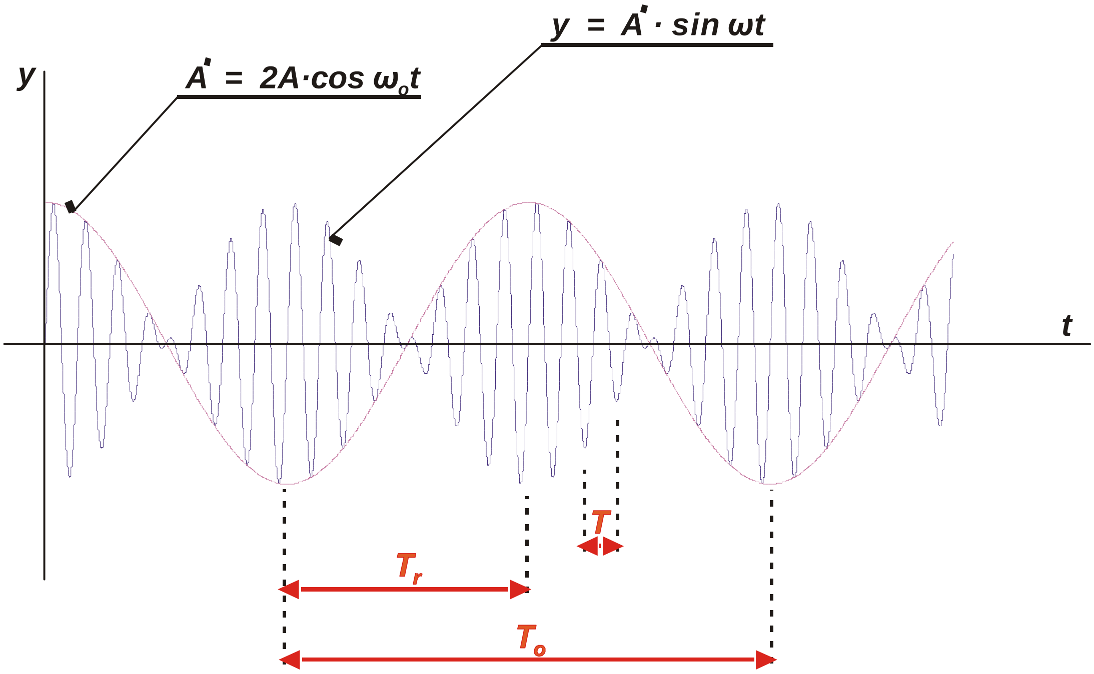
amplituda kmitů blízké frekvence

Tedy můžeme psát :

$$\boxed{y = A' \cdot \sin \omega t}$$

kmity blízké frekvence

Kmity lze také označit jako ***kvaziharmonické*** . Sinusová amplituda nízké frekvence tvoří jakousi obalovou křivku pro kmity vysoké frekvence (viz obr.). Takový výsledek dostaneme také v elektrotechnice při ***amplitudové modulaci*** .



Z obrázku vidíme, že periodické změny amplitudy (maxima) se opakují s poloviční periodou , tj. s frekvencí :

$$f_r = \frac{1}{T_r} = \frac{2}{T_o} = 2\,f_o = 2\cdot\frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\omega_1-\omega_2}{2} = \frac{2\pi\,f_1 - 2\pi\,f_2}{2\pi} = f_1 - f_2$$

Dostáváme jednoduchý vztah pro frekvenci periodických změn amplitudy, v akustice nazývaných ***rázy*** :

$$\boxed{f_r = f_1 - f_2}$$

frekvence rázů

Vymizení rázů je tedy velmi přesným indikátorem shody frekvencí dvou kmitů.

Proto lidské ucho i bez „hudebního sluchu“ dobře pozná shodu frekvencí dvou tónů a je tedy například možno podle kalibrovaného zdroje (ladičky) dokonale naladit struny hudebního nástroje i sladit dohromady celý orchestr).

(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 01/2005, rev. 05/2008**

Vlnění pružného prostředí

Vznik vlnění a jeho popis

V minulých kapitolách jsme dosti podrobně probrali různé druhy kmitů jako speciální pohyb hmotného bodu. Ve světě kolem nás však většinou nekmitají jednotlivé hmotné body (a ani vlastně neexistují), ale kmitavé stavy pozorujeme u celých velkých makroskopických těles – pevných, kapalných i plynných …. a při popisu těchto pohybových stavů pak používáme pojem ***vlnění***.

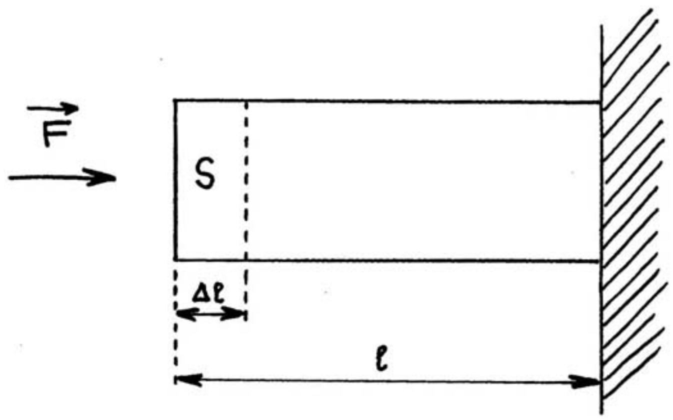
Všechna reálná tělesa jeví vždy určitou „míru" pružnosti - často se používá termín ***pružné hmotné prostředí***.

Poznámka: O pružnosti pevných látek nás přesvědčuje ***Hookeův zákon*** :

$$\sigma = E \cdot e$$

To je vztah přímé úměry mezi normálovým napětím (tlakem) a relativní deformací tělesa, tj. :

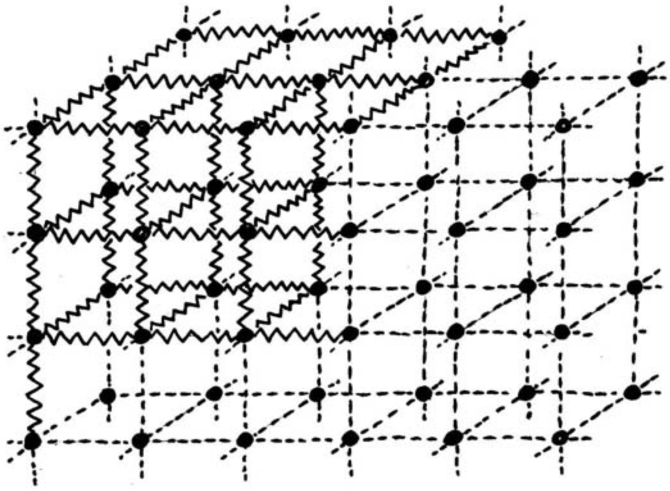
$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$



Protože deformace je vlastně výchylka nějakého hmotného bodu tělesa (viz obrázek - levý koncový bod tělesa) z rovnovážné polohy, znamená tato rovnice základní vztah pro pružnou sílu (skalárně, bez znaménka minus) :

$$F = \frac{E \cdot S}{l} \Delta l = konst. \cdot \Delta l$$

Fyzikálním modelem každého tělesa je soustava hmotných bodů a speciálně modelem pružného hmotného prostředí bude ***soustava pružně vázaných hmotných bodů*** , ve které mezi každými dvěma sousedními body působí pružná vazbová síla, která je úměrná jejich vzdálenosti (jakoby mezi těmito body byla natažena pomyslná pružina).



To ovšem znamená, že na každý hmotný bod působí nějaká výslednice pružných sil, jde tedy o ***soustavu pružně vázaných (lineárních harmonických) oscilátorů*** .

V rovnovážném, klidovém stavu je jistě součet všech pružných sil na libovolný hmotný bod roven nule. Když ovšem vychýlíme tento bod z rovnovážné polohy (a on pak vlastně začne kmitat), porušíme rovnováhu sil nejen u vychýleného bodu, ale i u bodů sousedních – ty se tedy začnou také pohybovat – a tak vyvolávají pohyb dalších svých sousedů …..
…. počáteční výchylka (kmity, rozruch) se tak „šíří“ na všechny strany …. až po nějakém čase budou kmitat všechny body soustavy.

Pojem vlnění označuje kmitání celé soustavy pružně vázaných hmotných bodů.

Fyzikální popis vlnění tedy musí obsahovat matematický vztah pro kmity každého bodu soustavy. Uvažme především, že výchylka konkrétního hmotného bodu z jeho rovnovážné polohy může mít obecně v prostoru zcela libovolný směr – označíme ji tedy jako vektor – a bude jistě záviset na poloze hmotného bodu a bude se také měnit s časem :

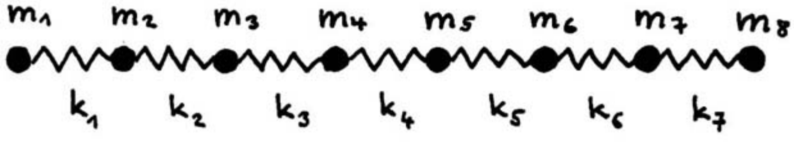
$$\boxed{\vec{u} = \vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}(x,y,z,t)}$$ ***obecná rovnice vlnění***

Obecné vlnění v prostoru tedy musí být popsáno vektorovou funkcí čtyř proměnných. Ve speciálním, jednodušším případě může ovšem existovat dvourozměrné vlnění (na ploše) :

$$\vec{u} = \vec{u}(x,y,t)$$

A matematicky nejjednodušší tvar bude jistě mít vlnění ***bodové řady*** (viz obrázek, kterou lze dobře realizovat jako strunu, tyč, vzduchový sloupec …) :

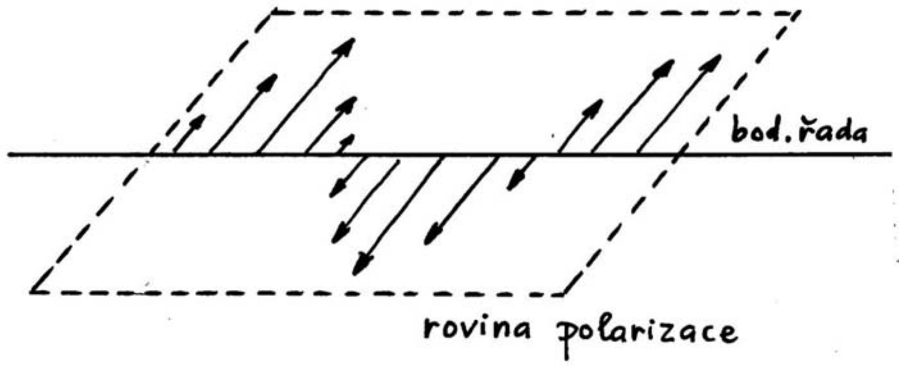
$$\vec{u} = \vec{u}(x,t)$$



Tento zápis lze ještě dále zjednodušit v případě ***lineárně polarizovaného vlnění*** , kdy jsou výchylky všech hmotných bodů navzájem rovnoběžné. Vektory výchylek tedy leží stále v jedné rovině (tzv. ***rovina***

polarizace), mají v prostoru stále stejný směr, a jestliže známe tento směr, můžeme pak určovat jen velikost výchylky, tj. skalár :

$$\boxed{u = u(x,t)}$$ ***lineárně polarizovaného vlnění*** (nejjednodušší tvar rovnice vlnění)



Ze střední školy už vlastně znáte dva druhy lineárně polarizovaného vlnění :

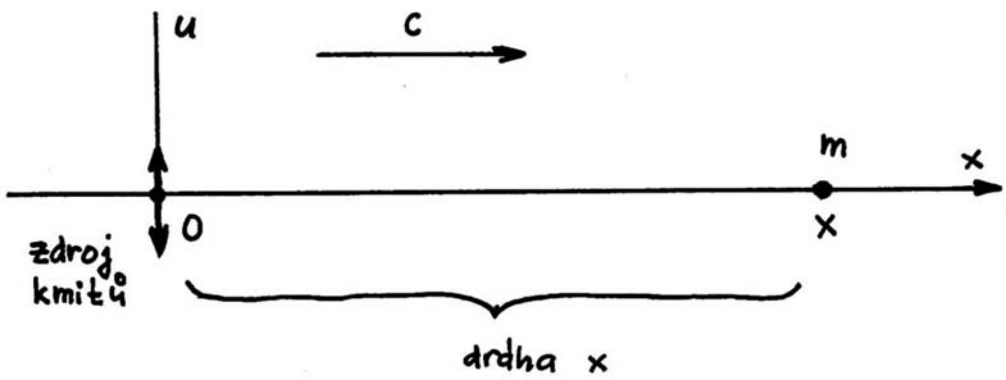
- příčné vlnění (kmity jsou kolmé k bodové řadě)
- podélné vlnění (kmity jsou rovnoběžné s bodovou řadou)

Sestavme nyní rovnici vlnění pro tento nejjednodušší případ lineárně polarizovaného a harmonického vlnění bodové řady:

> *Poznámka:* Při zcela exaktním přístupu by měl sestavení rovnice vlnění předcházet teoretický rozbor lineární soustavy oscilátorů, kde by bylo matematicky nalezen tvar kmitů každého oscilátoru – viz další kapitola „Lineární řetězec oscilátorů".

Bodovou řadu ztotožníme s osou x a budeme předpokládat, že výše zmíněný počáteční rozruch nastane v bodě 0 této osy jako důsledek působení nějakého ***zdroje kmitů***. Předpokládejme dále, že tento zdroj bude pohybovat s bodem 0 nejjednoduššími harmonickými kmity :

$$\boxed{u_0 = A \cdot \sin \omega t}$$ ***kmity zdroje***



Pružnými vazbami (mezi jednotlivými hmotnými body) se postupně uvádějí do pohybu (rozkmitávají se) sousední body - říkáme, že rozruch (harmonické kmity) se šíří (postupuje) od zdroje po ose x nějakou rychlostí c ……. vzniká tak ***postupné vlnění v bodové řadě*** .

Sledujme jeho šíření v kladném směru osy x a položme si otázku, jaká bude výchylka libovolného hmotného bodu m v místě o souřadnici x :
Tento bod ovšem nezačne kmitat současně se zapnutím zdroje, ale s časovým zpožděním – až po uplynutí určité doby, za kterou se kmity (rozruch) dostanou do daného místa.

K určení této doby musíme znát již zmíněnou rychlost šíření rozruchu c – je to rychlost šíření určité výchylky, která je dána určitou velikostí fáze kmitů – můžeme ji tedy označit jako rychlost postupu místa stejné fáze – tzv. ***fázová rychlost*** vlnění.

Potom bude časové zpoždění kmitů v místě x dáno proběhnutou drahou (délky x) a konstantní fázovou rychlostí podle vztahu (pro rovnoměrný pohyb) :

$$\boxed{t' = \frac{x}{c}}$$

časové zpoždění kmitů

Až po uplynutí této doby nastane v místě x stejná výchylka jako v počátku, ale ve zpožděném (posunutém) čase :

$$u = u(x,t) = A \cdot sin\,\omega(t - t')$$

Po dosazení za časové zpoždění vznikne ***základní matematický zápis postupného harmonického lineárně polarizovaného vlnění v bodové řadě*** (postupujícího v kladném směru osy x) :

$$\boxed{u(x,t) = A \cdot sin\,\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

A po roznásobení dostaneme další používaný tvar :

$$\boxed{u(x,t) = A \cdot sin\left(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot x}{c}\right)}$$

Proveďme podrobnější rozbor rovnice vlnění jako funkce dvou proměnných :

1) Pro ***x = konst.***

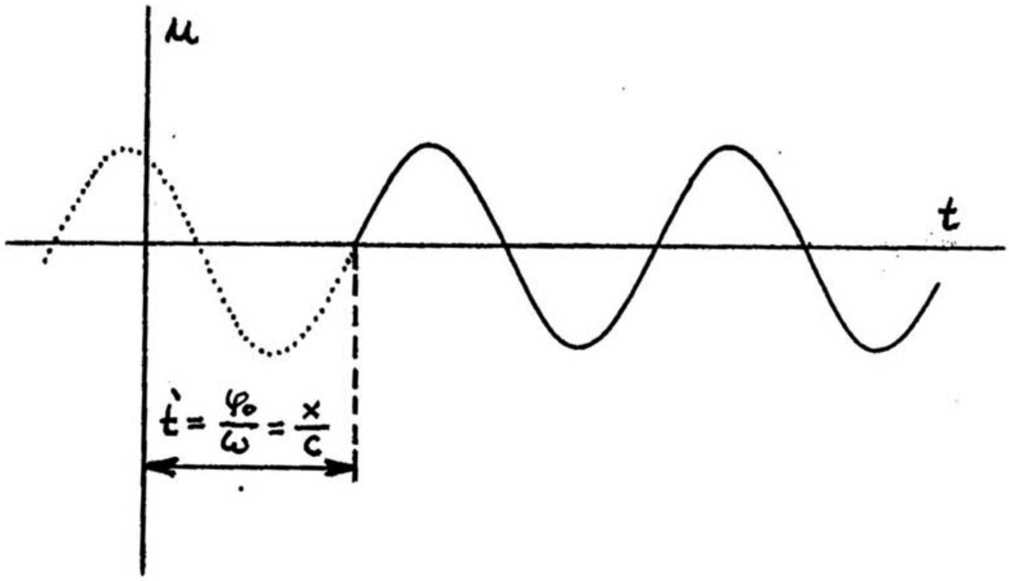
tato rovnice vyjadřuje harmonické kmity hmotného bodu v místě x – tak byla rovnice vlnění vlastně vytvořena. Pro toto zadané místo je celý druhý člen v závorce konstantní a vytváří vlastně fázovou konstantu kmitů :

$$u(x,t) = A \cdot sin\left(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot x}{c}\right) = A \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = u(t)$$

Vidíme, že fázová konstanta je záporná :

$$\varphi_0 = -\frac{\omega \cdot x}{c}$$

To nám jasně potvrzuje, že kmity v místě x jsou skutečně zpožděné oproti kmitům zdroje v počátku osy x (viz obr.) :



Z obrázku je vidět, že „počátek“ sinusovky je posunutý (opožděný) o čas t', pro který platí (je to nulový bod funkce sinus) :

$$\omega \cdot t' - \frac{\omega \cdot x}{c} = 0$$

Vypočítáme-li z rovnice tento čas, můžeme spokojeně konstatovat, že je právě roven časovému zpoždění kmitů v místě x - což byl také náš výchozí předpoklad při sestavení rovnice kmitů :

$$t' = \frac{x}{c} = -\frac{\varphi_0}{\omega}$$

<u>Rovnice vlnění tedy popisuje výchylku hmotných bodů v libovolném místě</u> – jsou to (harmonické) kmity stejné frekvence a amplitudy jako kmity v počátku osy x, ale fázově zpožděné v důsledku časového zpoždění při postupu vlnění (fázovou rychlostí c).

<u>Není vlastně ani principiálně důležité</u> , aby v počátku osy x (v bodě 0) byl zdroj kmitů – může být kdekoliv jinde (vlevo na ose x), důležitý je <u>směr postupu</u> vlnění – zleva doprava, (v kladném směru osy x) – který vytváří ono fázové zpoždění kmitů v místě x <u>oproti bodu 0</u> (obecněji – oproti bodu vzdálenému o x).

Pak je také zřejmé, že v případě <u>opačného postupu vlnění</u> (se zdrojem někde daleko v pravé části osy x) budou kmity v místě x naopak <u>předbíhat kmity</u> v bodě 0 … druhý člen v argumentu sinu musí proto změnit znaménko :

$$\boxed{u(x,t) \;=\; A \cdot sin\left(\omega \cdot t + \frac{\omega \cdot x}{c}\right)}$$

vlnění postupující v záporném směru osy x

2) Pro ***t = konst.***

bude rovnice vlnění ukazovat výchylky všech hmotných bodů v jednom daném čase, bude to tedy jakási „fotografie“ vlnění v tomto čase, která nám ukáže prostorové rozložení našeho vlnění.

Pro daný čas t je nyní v závorce konstantní první člen (označíme ho jiným písmenem, neboť to není standardní fázová konstanta časových kmitů) :

$$u(\,x,t\,) = \;A \cdot sin\left(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot x}{c}\right) \;=\; A \cdot sin\left(\alpha - \frac{\omega \cdot x}{c}\right) \;=\; u(x)$$

Budu doufat, že laskavý čtenář správně matematicky zhodnotí tento výraz a konstatuje, že jde opět o obecnou sinusovku, ale nyní s proměnnou x.

Periodu této sinusovky označíme λ (bude to vzdálenost mezi místy stejné fáze vlnění, tzv. ***vlnová délka***) a stanovíme ji z obecné definice periody funkce jako (nejmenšího) intervalu proměnné, po kterém se vždy opakuje hodnota (průběh) funkce :

$$u(x) \;=\; u(x+\lambda)$$

Máme tedy :

$$A \cdot sin\left(\alpha - \frac{\omega \cdot x}{c}\right) \;=\; A \cdot sin\left(\alpha - \frac{\omega \cdot (x+\lambda)}{c}\right)$$

Hodnoty funkce sinus se opakují s periodou 2π, tj. rozdíl obou argumentů (v závorkách) se musí rovnat této periodě :

$$\left(\alpha - \frac{\omega \cdot x}{c}\right) - \left(\alpha - \frac{\omega \cdot (x+\lambda)}{c}\right) \;=\; 2\pi$$

Po úpravě :

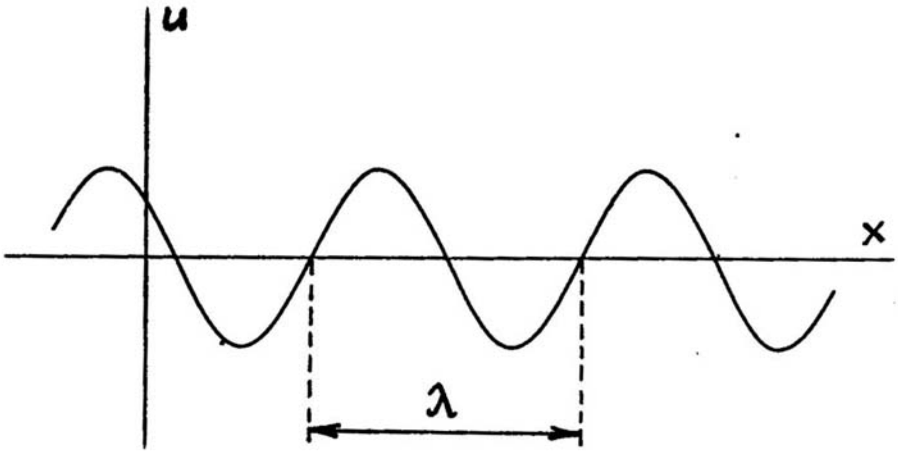
$$\frac{\omega \cdot \lambda}{c} \;=\; 2\pi$$

A s využitím znalostí o úhlové frekvenci můžeme stanovit vztahy pro vlnovou délku :

$$\boxed{\lambda \;=\; \frac{2 \cdot \pi \cdot c}{\omega} \;=\; \frac{2\pi \cdot c}{2\pi \cdot f} \;=\; \frac{c}{f} \;=\; c \cdot T}$$

vlnová délka

Vlnová délka je perioda „prostorové části“ rovnice vlnění, je to vzdálenost míst stejné fáze kmitů. Z posledního výrazu pak můžeme vidět další fyzikální smysl této veličiny – je to dráha (vzdálenost), kterou proběhne vlnění za dobu periody T
(za kterou se uskuteční právě jeden celý kmit a na proběhnuté dráze se tedy rozloží právě jedna kompletní vlna).



Někdy se také používá veličina :

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{\lambda}}$$ ***vlnočet***

jako podíl jednotkové délky a délky jedné vlny – můžeme ji tedy také chápat jako počet vln na jednotkové vzdálenosti.

Vraťme se nyní k poslednímu tvaru naší rovnice vlnění :

$$u(x,t) = A \cdot sin\left(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot x}{c}\right)$$

A provedeme poslední formální úpravu – podíl úhlové frekvence a fázové rychlosti označíme jako novou konstantu :

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{c} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = 2 \cdot \pi \cdot \sigma}$$ ***úhlový vlnočet***

Název této veličiny vyplývá z její velikosti, rovné 2π-násobku obyčejného vlnočtu.

Vznikl tak nejznámější, formálně nejjednodušší tvar rovnice postupného harmonického vlnění v bodové řadě :

$$\boxed{u(x,t) = A \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x)}$$

Na závěr tohoto odstavce můžeme posoudit různé varianty rovnice vlnění, např. jak by se změnila v případě, že by kmity zdroje obsahovaly nějakou nenulovou fázovou konstantu :

$$u_0 = A \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Pak by se zřejmě tato konstanta beze změny „přenesla“ do kmitů v dalších místech bodové řady :

$$\boxed{u(x,t) = A \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)}$$

Nezapomeňte také na úvahy při rozboru rovnice vlnění, že v případě opačného postupu vlnění (v záporném směru osy x) nastane změna znaménka u prostorové části argumentu :

$$\boxed{u(x,t) = A \cdot sin(\omega \cdot t + k \cdot x)}$$

Protože rovnice vlnění je v podstatě rovnicí kmitů, lze pro ni psát analogický komplexní zápis jako pro kmity :

$$\boxed{\hat{u}(x,t) = A \cdot e^{\pm i \cdot (\omega \cdot t \pm k \cdot x + \varphi_0)}}$$

komplexní tvar vlnění

Poslední úvaha o variantách rovnice vlnění by se týkala možnosti, že kmity zdroje by nebyly harmonické, ale měly by zcela obecný průběh (i neperiodický), popsaný nějakou libovolnou funkcí času :

$$u_0 = f(t)$$

Pak by samozřejmě v bodové řadě vzniklo také neharmonické postupné vlnění, které by popisovala stejná funkce f s argumentem, který by vyjadřoval časové zpožďování nebo předbíhání kmitů v místě x oproti místu 0 :

$$\boxed{u(x,t) = f\left(t \pm \frac{x}{c}\right)}$$

neharmonické postupné vlnění

Vlnění v prostoru

Umístíme-li zdroj kmitů v nějakém místě 3-rozměrného pružného hmotného prostředí, pak se ovšem vzniklý rozruch šíří pomocí pružných vazeb částic na všechny sousední body , tj. do všech směrů v prostoru, do všech bodů tohoto prostředí.

Místa, do nichž se vlnění rozšíří v různých směrech za tutéž dobu, leží jistě na nějaké spojité ploše – tzv. ***vlnoplocha*** . Výchylky (kmity) všech bodů na vlnoploše jsou stejně časově (tedy i fázově) zpožděné oproti místu zdroje, mají tedy stejnou velikost i stejnou fázi.

Vlnoplocha je geometrické místo kmitů stejné fáze

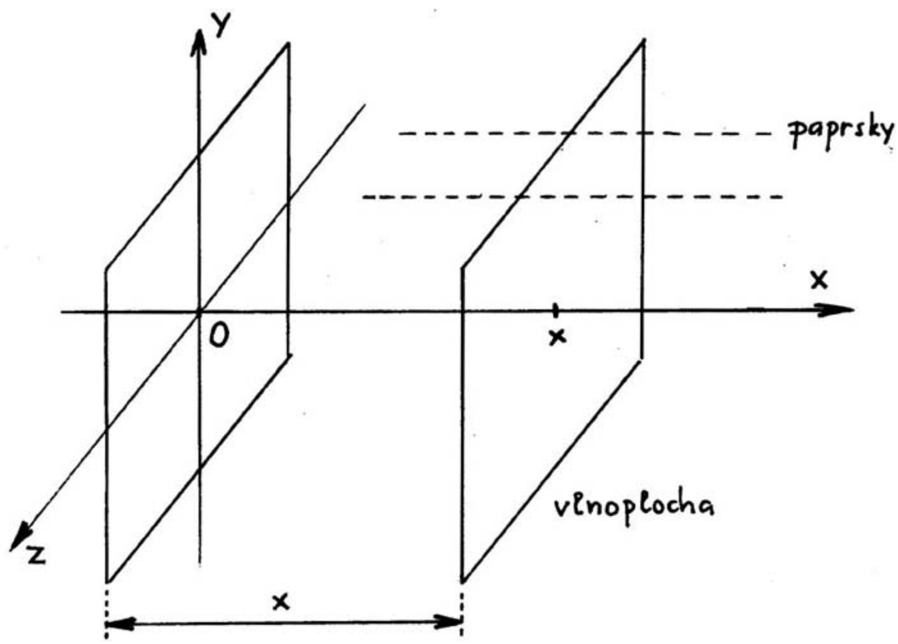
Poznámka: Vlnoplochy existují v každém čase, je jich tedy nekonečně mnoho, zakreslujeme však jen některé, např. takové, které jsou od sebe vzdáleny o vlnovou délku.

Při popisu vlnění také užíváme pojem ***paprsek*** – rozumíme tím přímku, která leží ve směru postupu vlnění v daném místě. Paprsky jsou kolmé k vlnoplochám, jsou to vlastně jednoduché bodové řady.

Vlnoplochy mají obecně libovolný tvar. Je-li však hmotné prostředí ***izotropní*** – tj. vlnění se šíří ve všech směrech (od zdroje) stejnou fázovou rychlostí – pak vznikají ***kulové vlnoplochy*** – a vlny (vlnění) také nazýváme kulové - jde vlastně o nejčastější tvar vlnoploch v přírodě.

Uvažme dále, že ve velké vzdálenosti od zdroje mají kulové vlnoplochy velký poloměr – v menší objemové části prostředí je tedy lze považovat za ***rovinné vlnoplochy***. To platí tím přesněji, čím menší část objemu sledujeme a v limitě pro nekonečně malou (diferenciální) část prostoru můžeme vlastně jakékoliv vlnoplochy považovat za rovinné. Rovinné vlnění (vlny) se tak stává teoreticky nejdůležitějším druhem vlnění.
Odvodíme proto rovnici tohoto vlnění.

Představme si nejjednodušší situaci, že rovinné vlnění postupuje ve směru osy x . Tato osa je tedy jedním z jeho paprsků a rovinné vlnoplochy jsou k ní kolmé. Do obrázku zakreslíme pouze dvě vlnoplochy – jednu jdoucí počátkem 0 (je to vlastně roviny yz) a druhou ve vzdálenosti x od počátku :



Víme, že na vlnoplochách mají všechny body stejnou výchylku, kmitají se stejnou fází. Na první vlnoploše jdoucí počátkem 0 mají tedy všechny hmotné body stejnou fázi jako v bodě 0 a všechny body na druhé vlnoploše mají stejnou fázi jako bod na ose x, tj. stejné fázové zpoždění jako tento bod.
Situace na celé této vlnoploše je tedy stejná jako v místě x na bodové řadě (na ose x, i na jakémkoliv paprsku). Potom rovnice vlnění v bodové řadě, která popisuje kmity v libovolných místech osy x, je také současně rovnicí pro vlnoplochy jdoucí těmito místy a je tedy nejjednodušší rovnicí prostorového vlnění, rovnicí postupného rovinného vlnění (lineárně polarizovaného), jdoucího ve směru osy x :

$$\boxed{u(x,y,z,t) \;=\; u(x,t) \;=\; A \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x)}$$ ***<u>rovinná vlna ve směru osy x</u>***

<u>Poznámka :</u> Rovinnou postupnou vlnu také samozřejmě popisují všechny obecnější tvary, které jsme doplnili u bodové řady – tj. s přídavnou fázovou konstantou, změna znaménka při opačném postupu vlnění, komplexní tvar, neharmonické vlnění.

<u>Vlnová rovnice</u>

Rovnice jakéhokoliv vlnění je principiálně vždy rovnicí popisující pohyb hmotných bodů (dané látky, soustavy) a je ji tedy možno nalézt řešením Newtonových pohybových rovnic. Sestavení těchto rovnic však jistě není jednoduchá záležitost. Pružné hmotné prostředí, které je předpokladem pro existenci vlnění, je speciální soustavou hmotných bodů, která se pohybuje „nestandardním“ způsobem – <u>vlnění jistě nelze vyjádřit pomocí translace a rotace a použít impulzových vět</u>, protože tyto věty neobsahují vnitřní vazební síly, které jsou pro vznik a existenci vlnění zásadně důležité. Exaktní stanovení pružných vazbových sil je pak velmi komplikované, neboť tyto síly závisejí na struktuře látky a vlastnostech jejích částic.

Je proto velmi výhodné, že se podařilo nalézt „<u>ekvivalentní pohybovou rovnici</u>“, která neobsahuje materiálové a strukturní parametry pružného prostředí – tzv. ***<u>vlnovou rovnici</u>***.

Provedeme odvození této rovnice pro základní druh vlnění - rovinné vlny postupující ve směru osy x :

$$u(x,t) \;=\; A \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Proveďme nejprve dvakrát derivaci (parciální) podle času :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - A \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

A potom dvakrát derivaci podle souřadnice :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A \cdot (-k) \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - A \cdot (-k)^2 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

Ze druhé časové derivace vyjádříme funkci sinus :

$$sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \;=\; -\frac{1}{A \cdot \omega^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

a dosadíme do posledního vztahu pro druhou prostorovou derivaci :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\cdot(-k)^2\cdot\frac{-1}{A\cdot\omega^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Jestliže použijeme definiční vztah pro úhlový vlnočet :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

dostaneme po vykrácení :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

vlnová rovnice (nejjednodušší tvar)

Tato rovnice je skutečně ekvivalentní k pohybové rovnici, neboť na její jedné (pravé) straně vystupuje druhá derivace výchylky podle času, tj. zrychlení kmitající částice (elementu) hmoty, působící síly se však podařilo vyjádřit druhou parciální derivací podle souřadnice a fázovou rychlostí vlnění (ta jediná závisí na vlastnostech prostředí).

Rovnice vlnění je pak řešením vlnové rovnice. Je velmi pozoruhodné, že vlnovou rovnici splňuje i postupné neharmonické vlnění libovolného tvaru (zkuste sami dosazení) :

$$u = f\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$$

Bez odvozování si uvedeme, že vlnová rovnice ještě může být dále zobecněna pro lineárně polarizované postupné vlnění v libovolném směru – pak se na levé straně objeví další parciální derivace podle y a z :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Levou stranu je možno formálně zjednodušit využitím Laplaceova operátoru :

$$\boxed{\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

Pak dostaneme :

$$\Delta u = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

A v nejobecnějším případě ***nepolarizovaného vlnění***, kdy výchylky hmotných bodů je nutno vyjádřit jako vektory, se vlnová rovnice stane rovnicí vektorovou :

$$\boxed{\Delta \vec{u} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}}$$

vlnová rovnice (obecný tvar)

Matematicky jde o parciální diferenciální rovnici 2.řádu. Zásadně důležité pak je, že i když byla tato rovnice odvozena pro rovinné vlny, platí pro jakékoliv vlnění, neboť jako každá rovnice s diferenciály platí jen pro diferenciální – nekonečně malou – část prostoru, pro dané (prakticky bodové) místo, kdy lze jakoukoliv vlnoplochu považovat za rovinnou.

Skládání (interference) vlnění

Protože vlnění je ve své podstatě kmitání hmotných bodů, nemůže nás překvapit, že existuje jev skládání (několika) vlnění od různých zdrojů, který neznamená nic jiného než skládání několika různých kmitů (výchylek) v určitém (libovolném) místě.

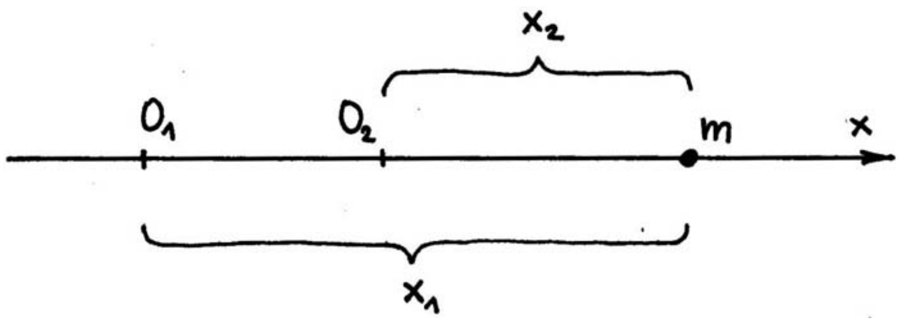
Podle principu superpozice mechanických pohybů se například dvě okamžité výchylky hmotného bodu v daném místě od dvou vlnění (tyto výchylky jsou určeny rovnicemi vlnění) sečtou – v nejobecnějším případě vektorově – do výsledné výchylky hmotného bodu a vznikne rovnice výsledného vlnění :

$$\vec{u}(x,y,z,t) = \vec{u}_1(x,y,z,t) + \vec{u}_2(x,y,z,t)$$

Nejjednodušší bude ovšem interference dvou ***stejně lineárně polarizovaných*** rovinných vln stejné vlnové délky postupující ve stejném směru osy x. Pak totiž sčítáme pouze skaláry, a protože rovinné vlny se popisují stejnými rovnicemi jako bodové řady, můžeme tento problém převést na interferenci vlnění v bodové řadě :

Předpokládejme tedy, že v bodové řadě existují na dvou místech (O_1 a O_2) dva zdroje vlnění, které kmitají se stejnou periodou, mají stejný směr kmitání a stejné fáze (nebo alespoň konstantní fázový rozdíl) – to jsou tzv. ***koherentní zdroje*** :

$$u_1(O_1) = A_1 \cdot \sin \omega t$$
$$u_2(O_2) = A_2 \cdot \sin \omega t \qquad nebo \quad u_2 = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$



V kladném směru osy x se potom šíří dvě stejně lineárně polarizovaná vlnění stejné vlnové délky. Fázová zpoždění obou vlnění v libovolném bodě m daná proběhnutými drahami obou vlnění (x_1, x_2) pak určují rovnice obou vlnění, tj. okamžité výchylky v tomto bodě :

$$u_1(x,t) = A_1 \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x_1)$$
$$u_2(x,t) = A_2 \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x_2)$$

Výsledná výchylka bodu m je pak jejich skalárním součtem :

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = A_1 \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x_1) + A_2 \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x_2)$$

Ve sledovaném bodě m, tj. pro zadané hodnoty x_1 a x_2 tato rovnice znamená „obyčejné“ skládání ***dvou rovnoběžných kmitů stejné frekvence*** s různými amplitudami (A_1, A_1) a s různými fázovými konstantami :

$$\varphi_1 = -k \cdot x_1$$
$$\varphi_2 = -k \cdot x_2$$

A můžeme tak v plné míře aplikovat naše dřívější poznatky o skládání rovnoběžných kmitů :

Výsledné kmity (vlnění) jsou opět harmonické, stejné frekvence (vlnové délky) s výslednou amplitudou a fázovou konstantou, které se určí např. grafickou metodou pomocí komplexních amplitud.

Velmi často zajímají fyziky i techniky, stejně jako při skládání kmitů, extrémní výsledky :

a) Víme, že pro ***maximum interference*** platí podmínka na fázový rozdíl kmitů :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm n \cdot 2\pi \quad , \quad n = 0,1,2...$$

Jestliže dosadíme za fázové konstanty a úhlový vlnočet :

$$-k \cdot x_1 - (-k \cdot x_2) = \pm n \cdot 2\pi$$
$$k \cdot (x_2 - x_1) = \pm n \cdot 2\pi$$
$$\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot (x_2 - x_1) = \pm n \cdot 2\pi$$

Pak po vynásobení vlnovou délkou (a vykrácení) dostaneme :

$$x_2 - x_1 = \pm n \cdot \lambda$$

nebo :

$$\boxed{|x_1 - x_2| = n \cdot \lambda = 2n \cdot \frac{\lambda}{2}}$$

podmínka maxima interference

Výraz na levé straně je rozdíl vykonaných drah – dráhový rozdíl vlnění – a pro dosažení maximální výchylky (rovné součtu obou amplitud) musí být roven celočíselnému násobku vlnové délky (sudému násobku poloviny vlnové délky).

b) Pro ***interferenční minimum*** pak z obecné podmínky na fázový rozdíl kmitů platí :

$$\varphi_1 - \varphi_2 \;=\; \pm(2n+1)\cdot\pi \quad , \quad n = 0,1,2...$$

Dostaneme analogicky :

$$\frac{2\cdot\pi}{\lambda}\cdot(x_2 - x_1) \;=\; \pm(2n+1)\cdot\pi$$

a nakonec :

$$\boxed{|x_1 - x_2| \;=\; (2n+1)\cdot\frac{\lambda}{2}}$$

Dráhový rozdíl vlnění se tedy musí rovnat lichému násobku poloviny vlnové délky.

(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 01/2005**