9. Taylorova formule a její užití

9.1. Derivace a diferenciály vyšších řádů

9.1.1. Druhá derivace funkce f; vyšší derivace

Nechť existuje f' (první derivace) v bodě x_0 a jeho okolí $\mathcal{U}(x_0)$. Existuje-li

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} \overset{\text{ozn.}}{=} f''(x_0),$$

pak je toto číslo napsaná druhá derivace funkce f v bodě x_0

Existuje-li f'' v bodě x_0 a jeho okolí $\mathcal{U}(x_0)$, pak analogicky definujeme třetí derivaci funkce f v bodě x_0.

Stručně zapisujeme:

$$f''(x) = (f'(x))',$$
$$f'''(x) = (f''(x))',$$
$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Př: $f(x) = x^5 + e^{3x}$;

$f'(x) = 5x^4 + 3e^{3x}$,

$f''(x) = 20x^3 + 9e^{3x}$,

$f'''(x) = 60x^2 + 27e^{3x}$, - - - -, atd

9.1.2. Vyšší diferenciály

Diferenciál $df(x,h) = f'(x)h = f'(x)dx = df(x,dx)$ je lineární funkcí proměnné $h = \Delta x = dx$ a obecně nelineární funkcí

$$g(x) = df(x,h) = f'(x)h$$ v proměnné x.

Definujeme $d^2f(x,h) = d(df(x,h)) = dg(x,h) = g'(x)h =$
$= (f'(x)h)'h = f''(x)h^2 = f''(x)dx^2$

Analogicky: $d^3 f(x,h) = f'''(x)\, h^3 = f'''(x)(dx)^3$

$$\dots$$

$$d^n f(x,h) = f^{(n)}(x)\cdot(dx)^n$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}\,; \quad f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3}\,; \dots \; f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

! Upozornění: 1. derivace je podíl prvních diferenciálů:

$$df(x,h) = f'(x)\,h = f'(x)\,dx \Rightarrow f'(x) = \frac{df}{dx}$$

2. a vyšší derivace už není podíl příslušných diferenciálů, tj. např.:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{h^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\text{druhý diferenciál}}{\text{2. mocnina 1. diferenciálu}}$$

9.2. Taylorovy formule (Taylorův rozvoj)

9.2.1. Taylorova formule nultého stupně

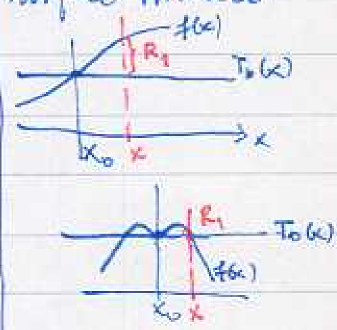
Je dán (pevný) bod x_0 a nechť funkce f má 1. derivaci $f'(x)$ pro všechna $x \in U(x_0)$.
Potom víme, že

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0).$$

Z věty o střední hodnotě plyne, že pro každé $x \in U(x_0)$ existuje $\xi = \xi(x)$ mezi x_0 a x tak, že platí

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)}$$

Možné situace:



atd.

Konstantní funkce $T_0(x) = f(x_0)$ se nazývá Taylorův polynom nultého stupně.

Výraz $R_1(x_0, x) = f'(\xi)(x - x_0)$

vyjadřuje chybu (lokální) aproximace funkce f konstantou $T_0(x)$.

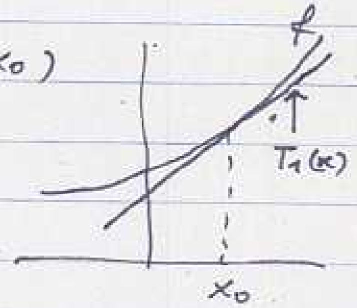
Pozn.: Lokální aproximace ≡ aproximace v okolí jednoho bodu.

9.2.2. Taylorova formule 1. stupně

Existuje-li $f''(x)$, $x \in U(x_0)$, potom pro každé $x \in U(x_0)$ existuje ξ mezi x_0 a x tak, že platí

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2}$$

Lineární funkce $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ se nazývá **Taylorův polynom 1. stupně**.



Výraz

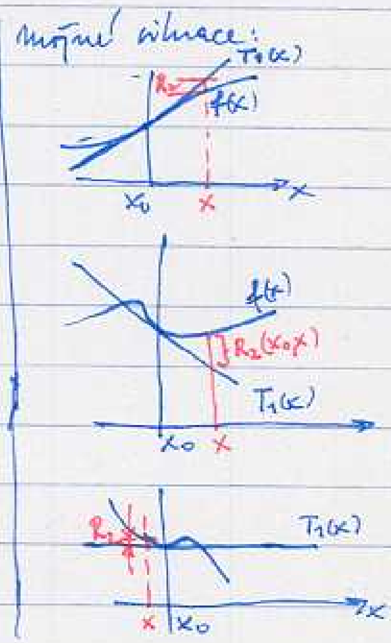
$$R_2(x_0,x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

vyjadřuje chybu (lokální) aproximace funkce f lineárním polynomem $T_1(x)$. Jak víme, graf tohoto polynomu je tečnou ke grafu funkce f v bodě x_0.

Současně vidíme, že

$$T_1(x_0) = f(x_0)$$
$$T_1'(x_0) = f'(x_0)$$
$$T_1''(x_0) = 0 \quad \neq f''(x_0)$$

Možné situace:



9.2.3. Taylorova formule 2. stupně

Existuje-li $f'''(x)$, $x \in U(x_0)$, potom pro každé $x \in U(x_0)$ existuje $\xi = \xi(x)$ mezi x_0 a x, že platí

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3}$$

Kvadratická funkce $T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

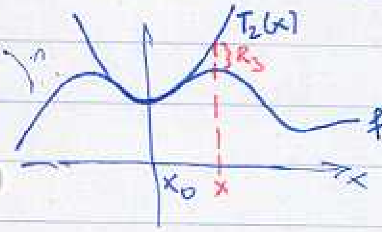
se nazývá <u>Taylorův polynom 2. stupně</u>

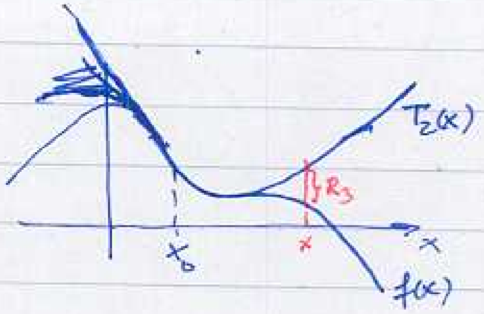
Výraz

$$R_3(x_0,x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$$

vyjadřuje chybu (lokální) aproximace funkce f kvadratickým polynomem $T_2(x)$.

Možné situace:





Vidíme, že graf $T_2(x)$ se v bodě x_0 „přimyká" ke grafu $f(x)$ i z hlediska zakřivení.

9.2.4. Příklady. Dána funkce f a bod x_0. Určit $T_n(x)$ a R_{n+1}.

(a) $f(x) = e^x$; $x_0 = 0$;

Vypočtá se: $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$; $f^{(n+1)}(\xi) = e^\xi$

$T_0(x) = 1$, $R_1 = e^\xi x$,

$T_1(x) = 1 + x$, $R_2 = \frac{e^\xi}{2} x$,

$T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $R_3 = \frac{e^\xi}{6} x^3$ $\qquad [f^{(n)}(x) = e^x]$

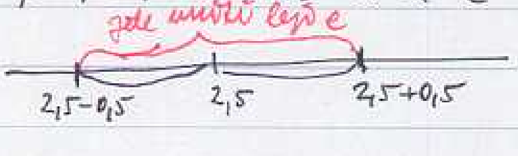
(b) Vypočítat e^1 pomocí Taylorovy formule 2. stupně:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^\xi}{6}x^3,$$

$$x=1: \quad e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{e^\xi}{6}\cdot 1^3 \Rightarrow e - 2{,}5 = \frac{e^\xi}{6}$$

$$\Rightarrow |e - 2{,}5| \leq \frac{3}{6}$$

Závěr: Číslo 2,5 je aproximací čísla e s odhadem chyby 0,5



(c) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0;$

$T_0(x) = 0, \quad R_0(?,x) = (\cos\xi)(x) \equiv x\cos\xi$

$T_1(x) = x, \quad R_2 = -\frac{x^2 \sin\xi}{2!},$

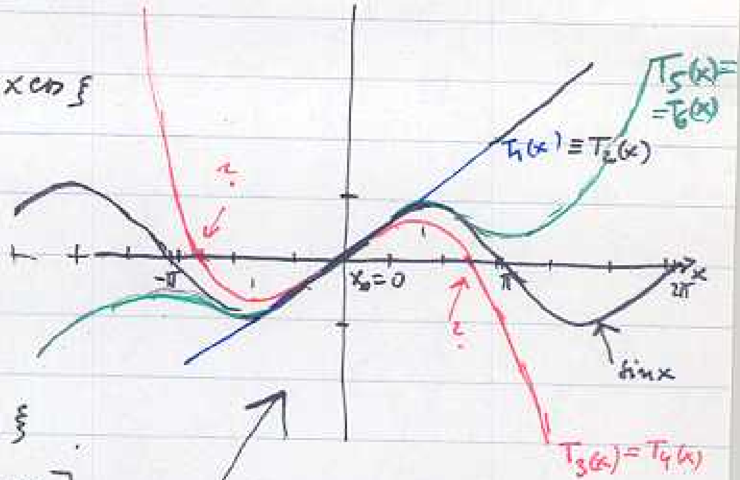
$T_2(x) = x, \quad R_3 = -\frac{x^3 \cos\xi}{3!},$

$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \quad R_4 = \frac{x^4 \sin\xi}{4!},$

$T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \quad R_5 = \frac{x^5 \cos\xi}{5!},$

$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}; \quad R_6 = -\frac{x^6 \sin\xi}{6!}$

$[f^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})]$

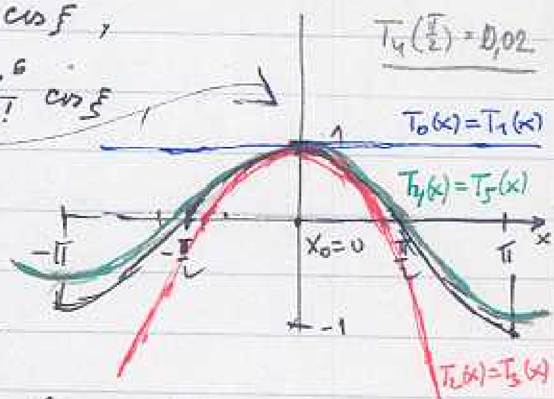


(d) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0;$

$T_2(x) = T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad R_4 = \frac{x^4}{4!}\cos\xi,$

$T_4(x) = T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad R_6 = -\frac{x^6}{6!}\cos\xi$

$[f^{(k)}(x) = \cos(\xi + k\frac{\pi}{2})]$



(e) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2; \quad x_0 = 2$

$T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x) \; \ldots \; ?$ (medZ!)

$T_4(x) = 4 - 7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4; \quad R_5 = 0$!

(f) $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1, \quad x_0 = -1$

$T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x), T_4(x), \; \ldots \; ?$ (medZ!)

$T_5(x) = (x+1)^2 + 2(x+1)^3 - 3(x+1)^4 + (x+1)^5, \quad R_6 = 0$!

(g) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1;$

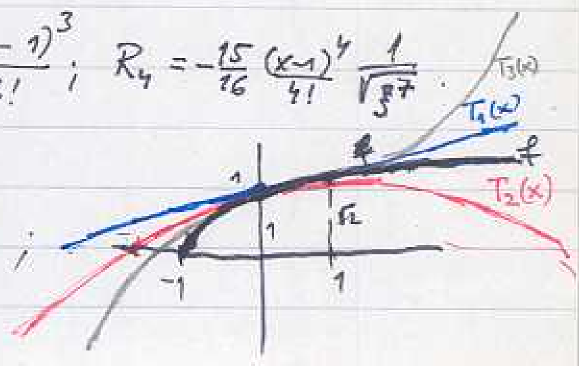
$T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}\frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{(x-1)^3}{3!}; \quad R_4 = -\frac{15}{16}\frac{(x-1)^4}{4!}\frac{1}{\sqrt{\xi^7}}$

(h) $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0;$

$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2; \quad R_3 = \frac{1}{16}x^3\frac{1}{\sqrt{\xi^5}};$

$+\frac{1}{16}x^3$

$T_4(x) =$ –||–



(k) $f(x) = tg\,x$, $x_0 = 0$

$T_5(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$, $R_6 = ?$

(l) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = 0$.

$T_3(x) = x + \frac{x^3}{3!}$, $R_4 = ?$ Porovnej s (c) $f(x) = \sin x$!

~~(m)~~ $f(x) = \mathrm{arctg}\,x$; $x_0 = 0$;

$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3}$; Porovnej s $tg\,x$!

(n) $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $x_0 = 0$;

$T_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, $R_5 = ?$! Porovnej s (d) $f(x) = \cos x$!

Cvičení: Komorovo podíl polynomů

$$\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}} = \frac{T_5(x)[\sin x]}{T_5(x)[\cos x]};$$ porovnej s $T_5(x)[tg\,x]$.

(o) $f(x) = e^{-x}$; $x_0 = 0$

Urči Taylorův polynom funkce $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Výsl: (?) $x - \frac{x^3}{3!}$

9.2.5. Taylorova formule n-tého stupně.

Existuje-li $f^{(n+1)}(x)$, $x \in U(x_0)$, potom pro každé $x \in U(x_0)$ existuje $\xi = \xi(x)$ mezi x_0 a x, že platí Taylorova formule

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_{n+1}(x_0,x)}.$$

Pozn: Taylorův polynom lokálně aproximuje funkci f v okolí $U(x_0)$ s chybou $R_{n+1}(x_0,x)$.

Označme-li $h = x - x_0$, $\Delta f(x_0,h) = f(x) - f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$, pak Taylorovu formuli napíšeme ve tvaru

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}}$$

nebo ve tvaru

$$\boxed{\Delta f(x_0,h) = \underbrace{df(x_0,h) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,h) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0,h)}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\xi,h)}_{R_{n+1}(x_0,h)}.}$$

Vyjádření $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x_0,x)$ se také nazývá Taylorův rozvoj.

9.2.6. Soupis Taylorových rozvojů nejběžnějších funkcí

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $x_0 = 0$,

2. $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + (-1)^{n+1}\frac{e^{-\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $x_0 = 0$;

3. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + R_{n+1}$, $x_0 = 0$

4. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + R_{n+1}$, $x_0 = 0$

9.2.6. Výsledky standardních úloh

úloha: Dána funkce f, číslo x_0, přirozené číslo n (stupeň Taylorova polynomu; $n+1$ řád diferencovatelnosti funkce f;

určit $T_n(x)$; chybu aproximace $R_{n+1}(x_0,x) = f(x) - T_n(x)$;

odhad chyby aproximace:

$$|f(x) - T_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^n,$$

kde M je odhad derivace $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, $x \in U(x_0)$.

1. $x_0=0$; $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$;

Pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ je $0 < e^x < 3$, $|x^{n+1}| \leq 1$

$$|e^x - T_n(x)| < \frac{3}{(n+1)!}$$

$n=0$, $n=1$, $n=2$ – viz 9.2.4

Pro $n=8$ je odhad chyby

$$|e^x - T_8(x)| < \frac{3}{9!} \doteq 8{,}26 \cdot 10^{-5}$$

$$T_8(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \doteq 2{,}7182785$$

$e \doteq 2{,}718281825$ (na 9 des. míst)

$e - T_8(1) \doteq 3{,}325 \cdot 10^{-6}$ – skutečná chyba je menší než její odhad

2. $x_0=0$, $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + (-1)^{n+1}\frac{e^{-\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$;

3. $x_0=0$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \frac{1}{(1-\xi)^{n+1}}x^{n+1}$;

!! Porovnat s geom. řadou s kvocientem x;

4. $x_0=0$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}$;

!! Porovnat s geom. řadou s kvocientem $-x$;

5. $x_0=0,\ r\in\mathbb{R};\ (1+x)^r = \underbrace{1+\binom{r}{1}x+\binom{r}{2}x^2+\dots+\binom{r}{n}x^n}_{T_n(x)} + \underbrace{\binom{r}{n+1}(1+\xi)^{r-n-1}x^{n+1}}_{R_{n+1}(x_0,x)}$

Pro $n=4,\ r=-\frac{1}{3}$:

$\binom{r}{n}$ .. zobecněné kombinační číslo; $= \dfrac{r(r-1)\cdot\dots\cdot(r-n+1)}{n!}$

$$(1+x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2-\frac{14}{81}x^3+\frac{35}{243}x^4+\frac{7\cdot 13}{3^5}(1+\xi)^{-\frac{16}{3}}x^5.$$

$$\binom{-\frac{1}{3}}{1} = -\frac{1}{3};\ \binom{-\frac{1}{3}}{2} = \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})}{2\cdot 1} = \frac{4}{9\cdot 2!};\ \binom{-\frac{1}{3}}{3} = \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})}{3\cdot 2\cdot 1} = -\frac{28}{3^3\cdot 3!};$$

[Pro $n=3,\ r=\frac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+R_4;\quad R_4=\binom{\frac{1}{2}}{4}(1+\xi)^{-\frac{7}{2}}x^4$.]

6. $x_0=1;\quad x^r = 1+\binom{r}{1}(x-1)+\binom{r}{2}(x-1)^2+\dots+\binom{r}{n}(x-1)^n+\binom{r}{n+1}\xi^{r-n+1}(x-1)^{n+1}$.

$n=5;\ r=\frac{1}{2}$:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2^2}(x-1)^2+\frac{1\cdot 3}{2^3}(x-1)^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4}(x-1)^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5}(x-1)^5+$$
$$+\binom{\frac{1}{2}}{6}\xi^{-\frac{7}{2}}(x-1)^6.$$ — viz odst. 9.2.4

7. $x_0=0;\quad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{n+1}$

$n = 2k-1,\ k=1,2,\dots$
$n = 2k;$

Pro $n=0,1,2,3,4,5$ viz odst. 9.2.4. vzorce $R_0, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$

Pro $n=1$ je odhad chyby $|\sin x - x| = \left|\frac{(\sin\xi)}{2!}x^2\right| \le \frac{x^2}{2}$;

~~Ka~~ Otázka: Pro ~~zadné~~ malá x je $|\sin x - x| \le 10^{-4}$?
Odpověď: Pro taková, ~~...~~ která splňují nerovnost $\frac{x^2}{2}\le 10^{-4}$,
tj. $|x|\le$ ~~...~~ $0{,}0142$

9.10

8. $x_0 = 0$; $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{n+1}$

$n = 2k-1,\ k = 1, 2, \dots$

$n = 2k,$

9. $x_0 = 0$; $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{2k!} + R_{n+1}$;

$n = 2k$

$n = 2k+1$

Pro $n = 2, 3, 4, 5$ viz odst. 9.2.4 včetně R_4, R_6

10. $x_0 = 0$; $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{n+1}$;

$n = 2k$

$n = 2k+1$

! Zkontrolujte, že Taylorův polynom funkce $\cosh x$ je roven Taylorově polynomu funkce $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

11. $x_0 = 0$; $\cos(x+a) = \cos a - x\sin a - \frac{x^2}{2!}\cos a + \frac{x^3}{3!}\sin a + \frac{x^4}{4!}\cos a + \dots \pm \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a)$ $+ R_{n+1}$

$f^{(n)}(a)$ je buď $\cos a$ nebo $\sin a$;

znaménko = $\operatorname{sign} (-1)^{\frac{n}{2}}$ pro n sudé

12. $x_0 = 0$; $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}$

13. $x_0 = 1$; $\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + R_{n+1}$

14. $x_0 = 0$; $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2k}}{(k)!}$

$n = 2k$;

$n = 2k-1 = 2k-2$;

15. $x_0=0$; $\mathrm{arctg}\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)} + R_{n+1}$

$$\left.\begin{aligned} n &= 2k-1 \\ n &= 2k-2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_{2k-1}(x) = T_{2k-2}(x)$$

$\frac{\pi}{2} = \mathrm{arctg}\,1 \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$;

16. $x_0=0$; $\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k+1)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + R_{2k+2}$

$n = 2k+1$; $T_{2k+1}(x) = T_{2k+2}(x)$;

17. $x_0=0$; $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^k x^{2k} + R_{n+1}$

$n = 2k$

$n = 2k+1$

18. $x_0=0$; $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + R_{n+1}$

— viz 15.

19. $x_0=0$; $n=4$; $f(x) = e^{\mathrm{arctg}\,x}$;

$T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24}$;

Pozn.: $e^z \approx 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!}$; dosaďte $z = x - \frac{x^3}{3} \approx \mathrm{arctg}\,x$;

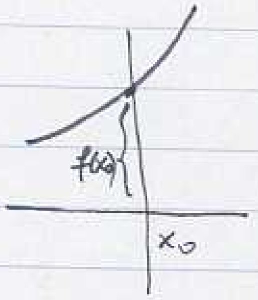
9.3. Užití Taylorovy formule

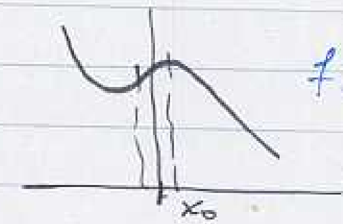
9.3.1. Funkce rostoucí [klesající] v okolí bodu x_0

Nechť platí Taylorova formule (0. stupně)

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \quad , \quad x \in \mathcal{U}(x_0) .$$

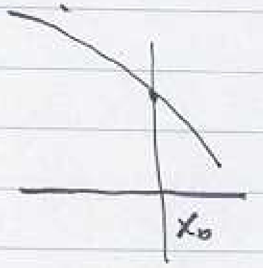
Když $\forall x \in \mathcal{U}(x_0)$ je $f' > 0$ pak $f(x) > f(x_0)$, $x > x_0$,
$f(x) < f(x_0)$, $x < x_0$.

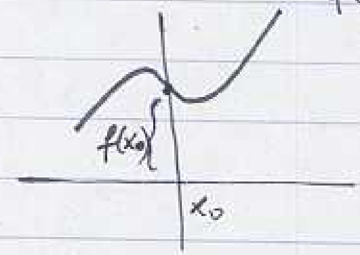




f je rostoucí v okolí bodu x_0

Když $\forall x \in \mathcal{U}(x_0)$ je $f' < 0$, pak $f(x) > f(x_0)$, $x < x_0$,
$f(x) < f(x_0)$, $x > 0$,





f je klesající v okolí bodu x_0

Př: $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$; $x \in R$

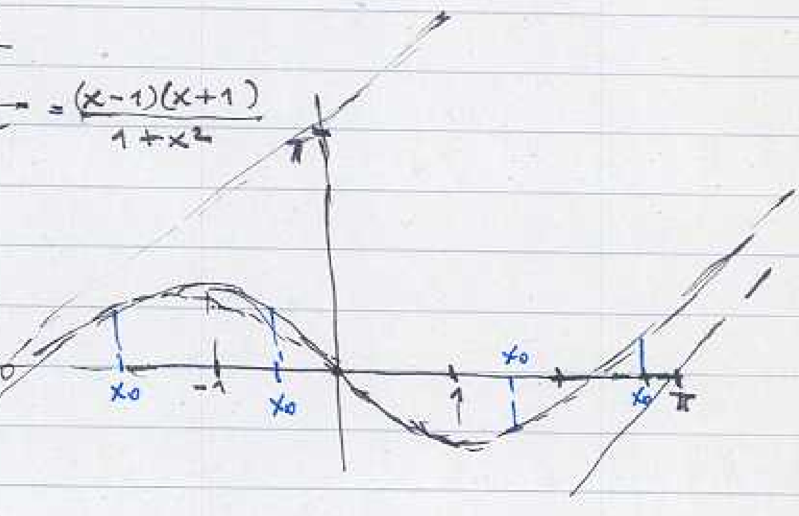
$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{1+x^2}$

Pro $x > 1$ je $f' > 0$

Pro $x < -1$ je $f' > 0$

Pro $-1 < x < 1$ je $f' < 0$

Pro $x = 1, x = -1$ je $f' = 0$



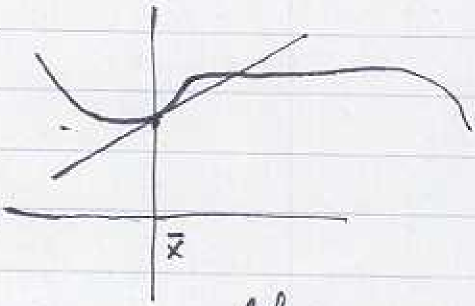
9.3.2. Graf nad tečnou [pod tečnou]

Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[\bar{x}, f(\bar{x})]$

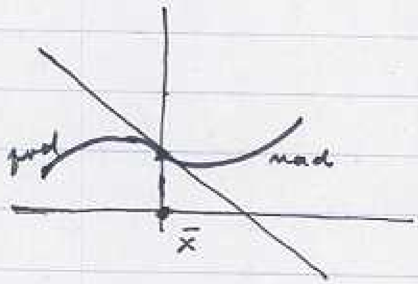
$$y = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Když $f(x) > f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$ → nad tečnou (konvexní) v bodě $\bar{x}$;

Když $f(x) < f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$ – pod tečnou (konkávní) v bodě $\bar{x}$



$\bar{x}$ je bod lok. minima



$\bar{x}$ je inflexní bod

nechť platí

$$\boxed{f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - \bar{x})^2;}$$

Schema:

~~Když~~ $f'' > 0 \iff$ ~~když~~ graf f je nad tečnou

$f'' < 0 \iff$ ~~když~~ graf f je pod tečnou

Př: $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4$, $f'(x) = 15x^4 - 20x^3 = 5x^3(3x - 4)$;

$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1)$

$x = 0,\ x = \frac{4}{3}$ – stac. body, $x = 1$ inflexní bod

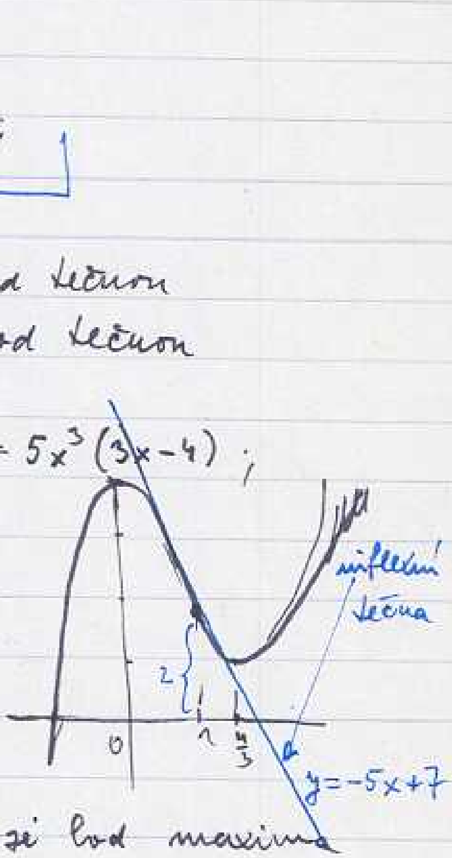
$x < 0 \Rightarrow f' > 0$ fce roste,

$x > \frac{4}{3} \Rightarrow f' > 0$ – " –

$0 < x < \frac{4}{3} \Rightarrow f' < 0$ fce klesá

$x > 1 \Rightarrow f'' > 0$ fce je konvexní

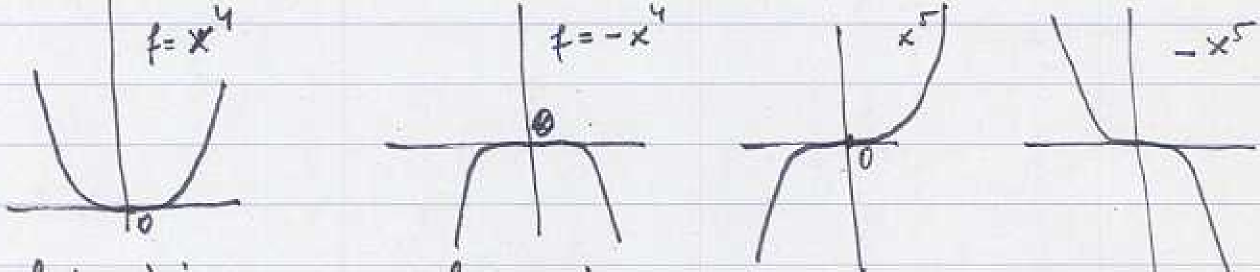
$x < 0 \Rightarrow f'' < 0$ fce je konkávní $\Big\} \Rightarrow$ 0 je bod maxima, $\frac{4}{3}$ je bod minima



Tvrzení: Nechť $f: I \to R$ je dvakrát diferencovatelná na I. Funkce je konvexní (konkávní) na I právě tehdy, když $f''(x) \geqq 0$ $[f''(x) \leqq 0]$ $\forall x \in I$. Ostrá nerovnost implikuje ostrou konvexnost.

Tvrzení: Nechť $f: I \to R$ je dvakrát diferencovatelná v bodě $\hat{x}$ a jeho okolí.
Když $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x}) > 0$, pak $\hat{x}$ je bod ostrého lokálního minima.
Když $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x}) < 0$, pak $\hat{x}$ je bod ostrého lokálního maxima.

Př: Pro následující funkce je pro $\hat{x} = 0$: $f'(\hat{x}) = 0$, $f''(\hat{x})$:



bod minima | bod maxima | bod vzrůstu, bod inflexe | bod klesání, bod inflexe

9.3.3. Aproximace funkcí

a) viz přehledy z odd. 9.2 a viz NM

b) výpočty limit:

např. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + R_n}{x} =$

$$= \lim \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots R_n \right] = \underline{\underline{1}}.$$